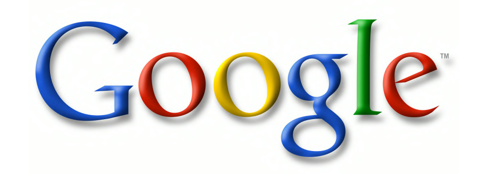
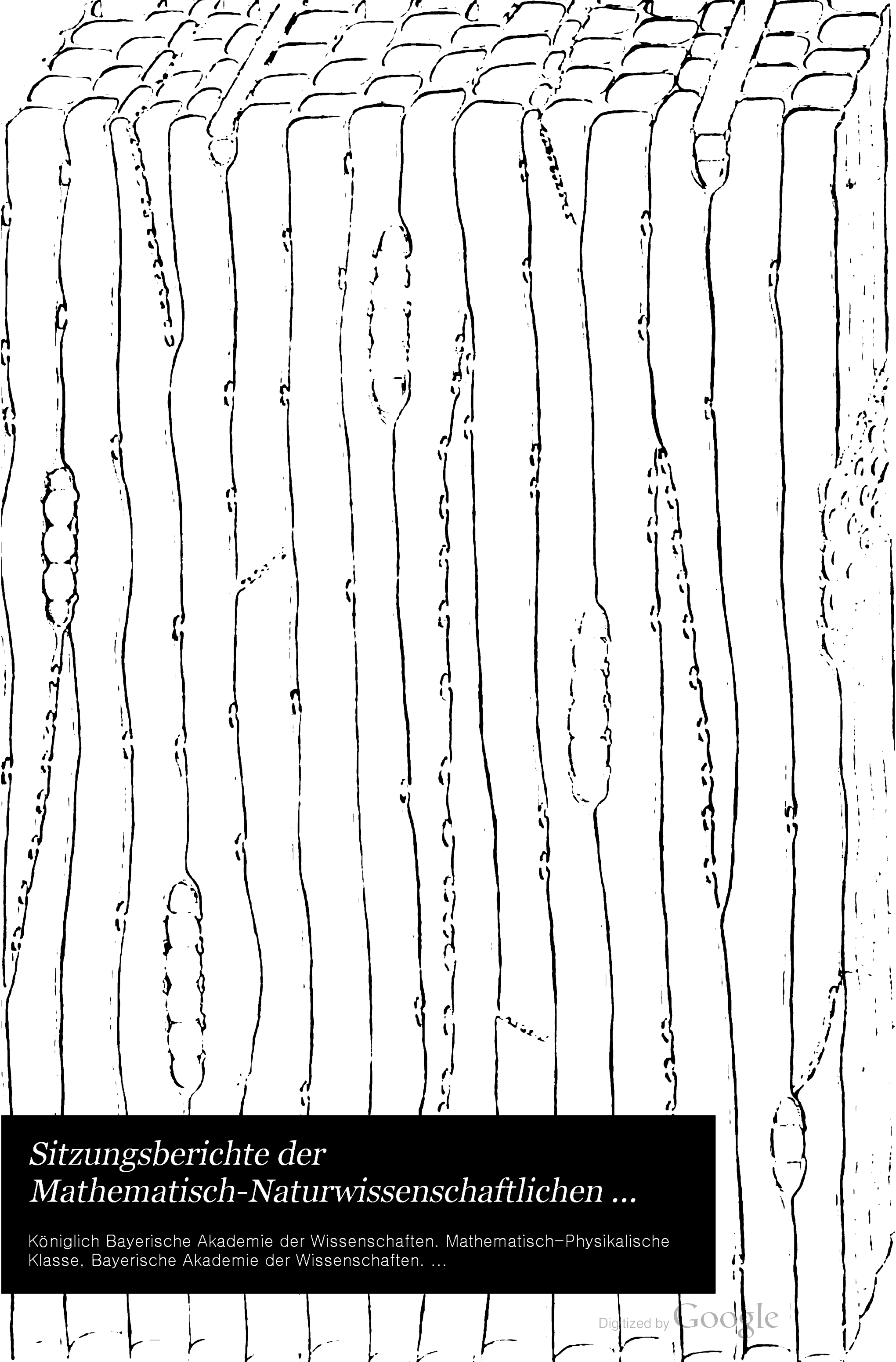
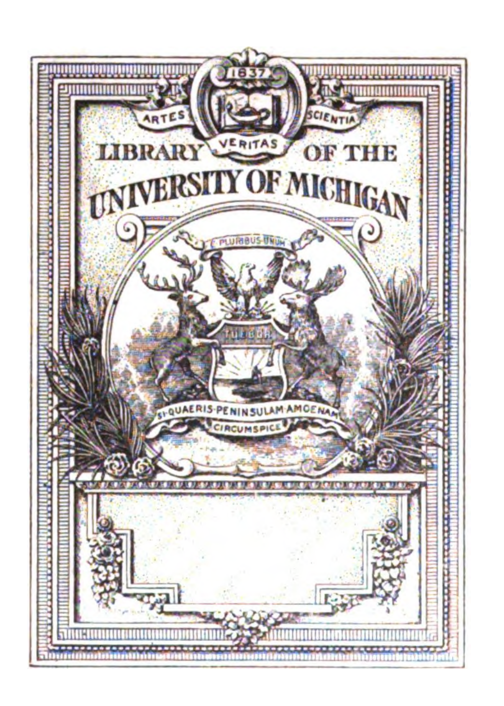



Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen ...
Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Physikalische Klasse, Bayerische Akademie der Wissenschaften. ...
Digitized by Google


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXV Jahrgang 1895.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 136. Stiftungstages am 28. März 1895.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1895.

Sitzung vom 5. Januar 1895.

Sitzung vom 9. Februar 1895.

Sitzung vom 2. März 1895.

Sitzung vom 4. Mai 1895.

Sitzung vom 15. Juni 1895.

Sitzung vom 6. Juli 1895.

Sitzung vom 2. November 1895.

Sitzung vom 7. Dezember 1895.

Nachtrag zur Sitzung vom 6. Juli 1895.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. Januar 1895.

1. Herr WALTER DYCK trägt vor: „Ueber die Bestimmung der Anzahl der einem System von n-Gleichungen mit n-Variabeln gemeinsamen Wurzeln und über die Berechnung der Summe der Werthe, welche eine weitere Funktion dieser Variabeln in diesen Nullstellen annimmt."

Er bespricht die Stellung der hierauf bezüglichen Arbeiten von Kronecker zu den anschliessenden von Picard, und gibt die Weiterführung dieser Untersuchungen im Sinne der ursprünglichen Cauchy'schen Theoreme.

Die Resultate sind in einem Schreiben an Picard (veröffentlicht in den Comptes rendus de l'Acad. francaise vom 31. Dezember 1894 und 7. Januar 1895) niedergelegt und werden später in ausgeführter Form veröffentlicht.

2. Herr JOHANNES RANKE macht eine Mittheilung: „Zur Anthropologie der Halswirbelsäule; Beitrag zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform."

3. Herr E. v. Lommel legt eine Notiz des auswärtigen Mitgliedes der Classe, Herrn Ludwig Boltzmann in Wien, vor: „Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten."

4. Herr Johannes Rückert bespricht seine Untersuchungen: „Zur Kenntniss des Befruchtungsvorganges." Ein Auszug daraus folgt in den Sitzungsberichten.

5. Herr Hugo Seeliger zeigt eine Anzahl astronomischer Photographien von Herrn Prof. Wolf in Heidelberg vor. Genaue Zeichnungen von 5 dieser Photographien erscheinen mit dem erläuternden Text in den Denkschriften.

6. Herr Alfred Pringsheim spricht: „Ueber den Cauchy'schen Integralsatz."

Zur Anthropologie der Halswirbelsäule.

Beitrag zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform.

Von **Johannes Ranke.**

(Eingelaufen 5. Januar.)

Bei der Fortsetzung der Studien zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform wurde ich von der Untersuchung der anthropologischen Bauverhältnisse der Schädelbasis[1]) zu jenen der Halswirbelsäule geführt.

Hier fesselt zunächst die Bildung des Atlasgelenkes die Aufmerksamkeit. So ähnlich der Bau dieses Gelenkes bei dem Menschen und den menschenähnlichen Affen auch ist, so zeigt sich doch ein mechanisch wichtiger Unterschied in der Stellung der im Gelenk vereinigten Knochenflächen. Die beiden Gelenkhöcker des Hinterhauptbeins, die Condylen, welche sich mit dem Atlas in einem zweifachen Gelenke vereinigen, sind bei dem Menschen bei normaler aufrechter Kopfhaltung direkt nach unten gerichtet, während ihre Richtung bei den menschenähnlichen Affen, wie bei allen Wirbelthieren, mehr oder weniger nach hinten geht.

Bei dem Menschen steht daher der Hauptkrümmungsradius der Gelenkfläche der Condylen auf dem Scheitel ihrer

---

[1]) über welche Herr Professor Dr. von Kupffer in der Sitzung der k. b. Akademie d. W. vom 8. Juli 1893 berichtete unter Vorlage meines Buches: Ueber einige gesetzmässige Beziehungen zwischen Schädelgrund, Gehirn und Gesichtsschädel. 4°. 132 S. Mit 30 Tafeln. München 1892. Fr. Bassermann.

Convexität senkrecht, sodass der nach vorn und der nach hinten gewendete Abschnitt des von der Gelenkfläche gebildeten Bogens gleich gross ist. Bei dem Gorilla bildet der Krümmungsradius der Gelenkfläche unter denselben Verhältnissen einen Winkel von ca. 45° mit der Horizontalen und $^4/_5$ des Bogens sind nach hinten gewendet. Dabei sind die Gelenkflächen der Condylen bei dem Gorilla viel stärker gekrümmt, bei dem Menschen entsprechend flacher. Bei beiden hat der von der Gelenkfläche gebildete Bogen eine Länge von circa 28—30 mm. Der Krümmungsradius[1]) beträgt aber bei dem Gorilla nur 10, bei dem Menschen dagegen 18 mm, also fast das Doppelte. Ganz entsprechend verhalten sich die Gelenkgruben des Atlas, sie sind bei dem Gorilla entsprechend tiefer und umgreifen die Condylen in weiterer Ausdehnung als bei dem Menschen, das Gelenk ist bei dem Gorilla daher fester und weniger frei.

Der eben beschriebenen Stellung der Gelenkflächen der Condylen entspricht die Stellung der für ihre Aufnahme im Schädelatlasgelenke bestimmten Gelenkgruben des Atlas. Der Vorder- und Hinterrand dieser Gelenkgruben ist bei dem Menschen bei horizontaler Stellung des Wirbels etwa gleich hoch. Bei dem Atlas des Gorilla erhebt sich der Hinterrand wie die Lehne eines Stuhles, während der Vorderrand niedrig ist. Durch diese Lehnenbildung wird für die nach hinten gewendeten Gelenkfortsätze des Schädels ein Widerlager geschaffen.

Auch die seitlichen Gelenke zwischen Atlas und zweitem Halswirbel sind bei dem Gorilla weniger frei als bei dem Menschen. Bei letzterem gleiten fast ebene Flächen an einander hin, während die betreffenden Gelenkflächen bei dem Gorilla ausgesprochen gewölbt sind mit einem Radius von etwa 65 mm.

[1]) Durch Abnahme der Krümmungen mittelst Blechdraht gemessen.

Der ganze Bau der Halswirbelsäule überhaupt ist bei den menschenähnlichen Affen weit mehr auf Festigkeit und Stabilität gerichtet als bei dem Menschen. Auf Festigkeit zielt schon die tiefe zapfenförmige oder gelenkkopfartige Einsenkung der einzelnen Körper der Halswirbel in einander bei dem Gorilla wie bei allen Affen. Bei der menschlichen Halswirbelsäule ist eine solche Einsenkung der einzelnen Wirbelkörper in einander viel geringer, worauf z. Th. die hohe Beweglichkeit des Menschenhalses im Ganzen beruht. Die untere convexe Randcurve des menschlichen 2. Halswirbels hat in der Mitte einen Krümmungsradius von circa 11 mm und flacht sich nach beiden Seiten zu noch weiter etwas ab; die Krümmungscurve bildet im Ganzen, einschliesslich jener seitlichen Abflachung, ziemlich genau einen Halbkreis[1]) mit dem Radius von 11 mm. Bei dem männlichen Gorilla misst der Krümmungsradius nur ca. 6 mm, die Krümmungscurve ist eine sehr gestreckte Ellipse[2]); der Bogen beträgt mehr als einen Halbkreis, sodass der obere Wirbelkörper zapfenartig in den unteren eingesenkt ist.

Der gesteigerten Festigkeit der Halswirbelsäule entspricht auch das im Ganzen beträchtlichere Volumen der einzelnen Halswirbel bei den grossen menschenähnlichen Affen (Gorilla), während bei dem Menschen gerade die Halswirbel besonders wenig voluminös sind. Dieses höhere Volumen der Gorillahalswirbel spricht sich für die äussere Betrachtung vor Allem in den extrem lang- und starkentwickelten Dornfortsätzen aus, welche annähernd senkrecht auf die Längsachse des Halses gerichtet sind. Ganz entsprechend sind die Verhältnisse bei allen Anthropoiden. Während bei dem Menschen die Halswirbel und namentlich ihre Dornfortsätze (mit Ausnahme des 7.) besonders schwach, die Dornfortsätze gabelförmig ausgeschnitten sind, sind die Dornfortsätze der Halswirbel bei den grossen Anthro-

[1]) In Wahrheit eine Parabel.

[2]) Resp. Parabel.

poiden besonders stark. Der 4. Halswirbel des Menschen hat oft einen besonders schwachen gewöhnlich gabelig ausgeschnittenen nach abwärts gebogenen Dornfortsatz, der sich nur etwa 10 mm oder wenig mehr über die Hinterfläche des Wirbels in senkrechter Projection erhebt; bei dem Gorilla ragt er dagegen ca. 80—90 mm hoch über den Bogen hervor.

Der erste Halswirbel hat, soviel ich sehe, bei keinem menschenähnlichen Affen einen längeren Dornfortsatz; beim Gorillamännchen ist auch der zweite relativ kurz, da die Hinterfläche des Schädels bei vorwärts gewendetem Gesichte direkt auf dessen Spitze aufruht, sodass er sich schon aus diesem Grunde nicht höher entwickeln kann. Bei allen, welche ich untersuchen konnte, ist der Dornfortsatz des 4. Halswirbels am grössten und endigt, wie das beim Gorilla alle Halsdornfortsätze zeigen, in eine Art von Knopf. Huxley[1]) hebt als eine menschenähnliche Bildung des Schimpanse (Troglodytes) den gabeligen Ausschnitt seines 2. Halswirbeldornfortsatzes hervor, indem er sagt: „Aber dieser menschliche Charakter fehlt den übrigen Anthropoiden.“ Die Sache verhält sich doch etwas anders. Bei dem von mir untersuchten Schimpanse umgreift die gabelig ausgeschnittene Spitze des Dornfortsatzes des zweiten Halswirbels zangenartig die Spitze des dritten, sodass beide zusammen eine einheitliche breite und hohe Stützfläche für Band- und Muskelansatz bilden. Aehnlich zeigt sich eine Einrichtung bei dem zu den Halbaffen, Lemuren, gezählten grossköpfigen und namentlich extrem grossäugigen „plumpen oder faulen Lori“, Stenops (Ill.) oder Nycticebus tardigradus (Geoffr.). Bei diesem umgreift der ebenfalls gabelförmig oder besser gesagt zangenartig ausgeschnittene Dornfortsatz des zweiten Halswirbels sogar die Spitzen der Dornfortsätze des dritten und vierten Halswirbels, offenbar um die Festigkeit und Tragfähigkeit der Halswirbelsäule zu

[1]) Handbuch der Anatomie der Wirbelthiere. Uebersetzt von F. Ratzel. S. 399.

steigern. Auch bei niederen Säugethieren kommen ähnliche und mechanisch ähnlich wirkende Bildungen an der Halswirbelsäule vor. So bilden die Dornfortsätze des 2.—5. Halswirbels bei einigen geschickt kletternden mittel- und südamerikanischen Beutelratten (Didelphis cancrivora und Azarae) eine in gewissem Sinne gemeinschaftliche Bildung, indem die Halsdornfortsätze vom 2. Halswirbel an eine relative hohe und dicke, convexgewölbte, annähernd geschlossene, gegen Kopf und Brust zu abfallende Leiste bilden.

Diese besondere Festigkeit bedarf die Halswirbelsäule der grossen anthropoiden Affen zum Tragen und Halten ihres schweren Kopfes und zwar in ihrer der menschlichen aufrechten Körperhaltung angenäherten, wie man gewöhnlich sagt, halbrechten Stellung.

Die moderne Zoologie erkennt als ein den Menschen von den menschenähnlichen, sowie den niederen Affen unterscheidendes systematisches Merkmal den aufrechten Gang[1]) an, aber es wäre ein Missverständniss, wenn man annehmen wollte, nur der Mensch sei zu dem „aufrechten Gang" befähigt. Auch die anthropoiden Affen haben diese Fähigkeit in ausgesprochener Weise und benützen sie gelegentlich, am besten verstehen diese Kunst die, eine Mittelstellung zwischen höheren und niederen catarrhinen Affen (den Anthropoiden und Cynomorphen) einnehmenden Gibbonarten, die Langarmaffen. Gelegentlich aus Bedürfniss oder durch Dressur dazu gezwungen, sehen wir viele der Säugethiere den aufrechten Gang annehmen.[2])

Die speciellen Skeleteinrichtungen, welche soeben von den grossen anthropoiden Affen geschildert worden sind, beziehen sich, wie die nähere Untersuchung ergibt, speciell auf das Bedürfniss, den grossen und schweren, an der Wirbelsäule

---

[1]) R. Hertwig, Lehrbuch der Zoologie. II. Aufl. S. 566 f.

[2]) Wie die auf den beiden Hinterfüssen, die Vorderfüsse in der Luft, zweibeinig einherschreitenden Elephanten Hagenbeck's u. a.

seitlich befestigten Kopf in der mehr oder weniger aufrechten Körperstellung zu halten.

Bei den wirklich vierfüssig gehenden Thieren sind die Halteeinrichtungen für den Schädel am Skelet anders als bei den menschenähnlichen Affen. Den betreffenden niederen Säugethieren fehlen die mächtig entwickelten Dornfortsätze der Halswirbel der Anthropoiden, ebenso wie dem Menschen. Dagegen ragen bei den eigentlichen „Vierfüsslern" die Dornfortsätze der ersten Brustwirbel, welche bei dem Menschen wie bei den menschenähnlichen Affen dachziegelförmig nach abwärts geneigt sind, mächtig in die Höhe, um den starken elastischen und muskulösen Haltorganen des Kopfes, dem Nackenband und der Nackenmuskulatur als feste Angriffs- und Stützpunkte zu dienen. Von diesen Nackendornen aus spannt sich das elastische Nackenband zur Hinterfläche des (2. Halswirbels und) Kopfes. Der letztere wird dadurch, wie der Querbalken eines Galgens oder eines Krahns seitlich an der Spitze der, vom Nacken vielfach annähernd senkrecht sich aufrichtenden Halswirbelsäule gehalten. Je schwerer der Kopf ist, desto mächtiger sind auch die Nackendornen; bei dem Skelet eines erwachsenen Bison[1]) fand ich die Dornfortsätze der ersten Brustwirbel, der Nackenwirbel, länger als irgend einen der langen Extremitätenknochen, speziell der Dornfortsatz des 4. Brustwirbels hat eine Länge von 470 mm.

Dass diese auffallende Bildung der Nackendornen wirklich mit dem Tragen eines schweren Kopfes correspondirt, ergibt sich bekanntlich daraus, dass bei den Geweih- oder Hörner-tragenden Säugethieren ihre Höhe und Stärke im Allgemeinen bedeutender erscheint, und dass sie einerseits bei den hornlosen Weibchen der Schafe, der Hirsche u. a. schwach bleiben, während andererseits die gehörnten Männchen, der weit schwerern Last des Schädels entsprechend, besonders hoch und stark

[1]) Münchener zoologische Sammlung.

ausgebildete Nackendornen aufweisen. Die Dornfortsätze der Halswirbel sind dagegen bei all den eigentlich vierfüssiggehenden Säugethieren[1]) auffallend klein und in diesem Sinne menschenähnlich, nur der zweite Halswirbel hat entwickeltere Ansatzflächen für die elastisch-muskulösen Haltapparate des Kopfs.

Schon ohne nähere Untersuchung erweckt die Betrachtung der mächtigen Halsdornen des Gorilla und der andern grossen menschenähnlichen Affen, Orangutan und Schimpanse, den Eindruck, dass man es hier mit einem den eben geschilderten Nackendornen entsprechenden Halteapparat für den schweren, ebenfalls seitlich an der Spitze der Wirbelsäule, befestigten Kopf zu thun habe. Entsprechend der halbrechten Stellung dieser Affen könnte ja der Halteapparat von dem Nacken auf die Halswirbelsäule verlegt sein: das ist die Frage.

Wie gesagt sind die Dornfortsätze der Rückenwirbel bei den Anthropoiden relativ schwach und menschenähnlich, dagegen bieten die Dornfortsätze der Halswirbel die nöthigen Angriffsflächen für Ansatz oder Ursprung der mächtigen Band- und Muskelmassen, welche nothwendig sind, um den gewaltigen Kopf, trotz seines, wie wir sahen, seitlichen Ansatzes an der Spitze der Wirbelsäule bei der halbrechten oder aufrechten Körperhaltung des Thieres beim Gehen und Klettern mit parallel zur Bodenfläche gerichteten Augenachsen geradeaus vor sich hinsehen zu lassen, ganz ähnlich wie letzteres beim Menschen der Fall ist.

Um die eben gestellte Frage nach der mechanischen Bedeutung des Halsdornenapparates der Anthropoiden zu lösen, gibt es eine einfache Betrachtung. Ist die besondere Grössenausbildung der Halsdornen bei den menschenähnlichen Affen wirklich eine mechanische Bedingung für die halbrechte oder mehr weniger aufrechte Körperhaltung, so muss

---

[1]) Ausnahmen s. oben S. 7 und unten S. 11, Anmerkung.

sie sich bei allen Thieren finden, die sich darin den menschenähnlichen Affen ähnlich verhalten, dagegen denen fehlen, welchen die mehr weniger aufrechte Körperhaltung fehlt.

Das Charakteristische der Halsdornenbildung der Anthropoiden besteht darin, dass im Gegensatz gegen das bei dem Menschen, wie bei der übergrossen Mehrzahl aller Säugethiere, bestehende Verhältniss, dass die Dornfortsätze der Halswirbel kürzer sind als die Dornfortsätze der Brustwirbel, bei den Anthropoiden dagegen die Brustwirbeldornfortsätze kürzer sind als die Halswirbeldornfortsätze.

Bei den relativ kleinköpfigen Gibbons und der Mehrzahl der niederen Affen der alten und neuen Welt besteht insofern eine Annäherung an die Halsdornenbildung der Anthropoiden, als die Dornfortsätze der Hals- und der Brustwirbel wenig an Grösse unterschieden sind, vielfach sind sogar die Halsdornen etwas länger. Es stimmt das in dem fraglichen Sinne mit der Lebensgewohnheit der niederen Affen gut überein.

Unter den Lemuren[1]) gibt es aber ein Thier, welches vielleicht in noch höherem Grade als irgend ein menschenähnlicher Affe es liebt, eine ganz oder halb aufrechte Rumpfhaltung anzunehmen. Es ist das der Lichanotus Indri Geoff., der Madagassische Jagdaffe, welcher gern und gut aufrecht geht und, namentlich in Hinblick auf die Längenproportionen der Beine und Arme, eine auffallende Menschenähnlichkeit zeigt, nur der kleine Kopf mit der thierischen Schnauze u. n. a. passt nicht zu diesem Eindruck. Abgesehen vom Kopf sieht das wunderliche Thier ganz wie eine menschliche Puppe in Pelzkleidern aus. Obwohl nun der Kopf für die Körpergrösse verhältnissmässig klein und wenig voluminös ist, sind bei dem Indri doch die Halsdornen länger und breiter als die Nackendornen, und entsprechen in der Form

[1]) Ueber den faulen Lori s. oben S. 6.

weitgehend den Dornfortsätzen der Lendenwirbel. Vom dritten Halswirbel an nimmt die Höhe und sagittale Breite seiner Halsdornen bis zum siebenten Halswirbel zu, von da, vom ersten Nackenwirbel an, wieder ab, sodass der erste Nackenwirbeldornfortsatz in Grösse und Form etwa dem vierten, der zweite und dritte dem dritten Halswirbel entsprechen; vom vierten Nackenwirbel an beginnt die typische dachziegelförmige Abwärtsneigung der Brustwirbeldornfortsätze.[1])

Unter den Vögeln gibt es eine Anzahl aufrecht sitzender und gehender Formen: die Pinguine (Aptenodytes), Eistaucher- (Colymbus) und Steissfuss- (Podiceps) Arten, auch bei diesen findet sich eine entsprechende Bildung an den Halswirbeln. Namentlich die Pinguine besitzen im Gegensatz gegen die mit horizontaler Rumpfhaltung gehenden und sitzenden Vögel wie z. B. die Hühner und Gänse u. v. a. an den oberen Halswirbeln starke Dornfortsätze neben noch anderen seitlichen knöchernen Halteinrichtungen, welche der weit überwiegenden Mehrzahl der Vögel fehlen. Eine Andeutung davon zeigt sich sonst nur noch bei solchen Arten, bei welchen der Hals einen ganz besonders schweren und grossen Kopf auch annähernd aufrecht zu tragen hat, wie Buceros, Alcedo, grosse Vultur-Arten.

Aus dieser Umschau ergibt es sich, dass die oben gestellte Frage im bejahenden Sinne beantwortet werden darf: die mächtig entwickelten Halsdornen der grossen Anthropoiden sind ein den Nackendornen der eigentlich vierfüssig gehenden Säugethiere entsprechender Halteapparat für den schweren Kopf, welcher im mechanischen Zusammenhang mit der

[1]) Merkwürdigerweise findet sich auch bei den niedrigsten Säugethieren, dem Schnabelthier und dem Ameisenigel, das Verhältniss, dass die Halsdornfortsätze länger sind als die Brustdornfortsätze, offenbar auch, wie bei einigen der oben erwähnten Vögel: Buceros etc., zur Haltung und Bewegung ihres relativ schweren Kopfes.



mehr oder weniger aufrechten Rumpfhaltung der höchsten Affen auf die Halswirbelsäule verlegt ist. Hier findet sich eine entsprechende Skeleteinrichtung bei allen sich aufrecht haltenden Wirbelthieren. Die grossen Halswirbeldornen ergänzen sonach die zuerst geschilderten knöchernen Einrichtungen zur Kopfhaltung am Hals der Anthropoiden, wofür am Schädel selbst die mächtig entwickelten Ansatzflächen am Hinterhaupt mit dem Hinterhauptkamm an der oberen Grenze der Hinterhauptschuppe u. a. zählen.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die mehr oder weniger aufrechte Körperhaltung der Anthropoiden, in welcher man in älterer Zeit manchmal eine Art von Uebergang zu der typisch menschlichen Körperhaltung finden wollte, mechanisch auf principiell verschiedenen Ursachen wie letztere beruht.

Der schwere seitlich an der Wirbelsäulenspitze befestigte Kopf der Anthropoiden wird durch elastische und Muskelkräfte in seiner bei der halbrechten Körperstellung horizontalen Lage gehalten, die aufrechte Körperhaltung wird bei ihnen mechanisch ermöglicht durch eine namentlich zwischen Hinterkopf und den Dornfortsätzen der Halswirbel specifisch entwickelte Haltevorrichtung für den Schädel, für welche, abgesehen von den elastisch-muskulösen Apparaten, specielle Skeleteinrichtungen (am Schädel und der Halswirbelsäule) vorhanden sind. Die aufrechte Körperhaltung der anthropoiden Affen beruht sonach zum grossen Theil auf Muskelarbeit.

Bekanntlich ist das mechanische Verhältniss der Kopfhaltung bei dem Menschen ein anderes.

Die Verbindungsstelle des Kopfes mit der Wirbelsäule ist bekanntlich an allen Schädeln dort, wo das Rückenmark aus der Schädelhöhle durch das grosse Hinterhauptsloch, Foramen magnum, aus- und in die Rückgratshöhle eintritt. Zu beiden Seiten der Vorderhälfte des Hinterhauptsloches befinden sich

die beiden oben besprochenen convexen Gelenkhöcker, die Condylen, zur Verbindung des Schädels mit dem ersten Halswirbel, dem Atlas. Bei dem Menschen sehen nun, wie gesagt (S. 3), die Gelenkflächen der Condylen bei normaler, horizontaler, Kopfhaltung direkt nach unten, während sie, wie wir oben sahen, auch bei dem Gorilla, dem menschenähnlichsten Affen, wie bei allen anderen Wirbelthieren bei der normalen, d. h. für die Anthropoiden auch horizontalen Kopfhaltung nach hinten gewendet sind. Ist der Menschenschädel an dieser Stelle unterstützt, so genügt nachweislich ein Minimum von Kraftaufwand, um ihn in seiner für den lebenden Menschen normalen Ruhestellung zu erhalten, während ein Gorillaschädel dabei nach vorne herabsinkt. Der mechanische Grund dafür ist bekanntlich der, dass das Foramen magnum mit den Condylen bei dem Menschen sehr annähernd in die Mitte der Unterfläche des Schädels gerückt ist, sodass bei senkrechter Unterstützung der Condylen der Schädel auf diesen, wie ein Wagbalken auf seinem Hypomochleon, im Gleichgewicht zu ruhen vermag. Ein Minimum von Muskel- und elastischer Spannung genügt, um diese Gleichgewichtsstellung zu erhalten. Daher kann die Halswirbelsäule des Menschen trotz des mächtigen Kopfes, den sie zu tragen und zu halten hat, so schwach sein, dass dieses Verhältniss als ein besonderes typisches für den Menschen schon den alten Anatomen, z. B. Eustachius, auffallen musste.

Bei den menschenähnlichen Affen, wie bei allen anderen Säugethieren ist dagegen, wie ich wiederhole, der Kopf an der Spitze der Wirbelsäule nicht balancirt, sondern an ihr seitlich aufgehängt. Bei alleiniger senkrechter Unterstützung der Gelenkflächen der Condylen fällt daher der Kopf, bei horizontaler Haltung, wie sie der normalen Körperhaltung der Anthropoiden bei ihrer typischen Körperstellung entspricht, nach vorne herab, wenn er nicht durch eine Kraft gehalten wird, welche der Schwere des Kopfes, einschliesslich der bei solcher Stellung

sich geltend machenden Hebelwirkung, gleichkommt. Die Ursache für die seitliche Befestigung des Schädels an der Wirbelsäule liegt darin, dass das Hinterhauptsloch mit den Condylen bei den Anthropoiden an das hintere Ende der Schädelbasis, bei der Mehrzahl der Wirbelthiere auf die Hinterseite des Schädels, gerückt ist. Dieser Stellung der Condylen entspricht dann die oben beschriebene, von der menschlichen Einrichtung sich so auffallend unterscheidende, Rückwärtswendung ihrer Gelenkflächen.

Bei dem Menschen beansprucht sonach die Aufrechthaltung des Kopfes so gut wie keine Muskelarbeit, sie ist die aufrechte Ruhestellung des Kopfes, und durch diese ist dann, was hier keines weiteren Beweises bedarf, die aufrechte Körperhaltung des Menschen im Ganzen und Einzelnen, als eine Ruhestellung, zu deren Erhaltung ein Minimum von Muskelarbeit gehört, bedingt. In dieser Hinsicht ist die aufrechte Körperhaltung des Menschen in ihrem mechanischen Zustandekommen etwas Besonderes. Während doch auch der menschenähnlichste Affe eine wirklich aufrechte Körperhaltung, die er ja relativ leicht anzunehmen vermag, durch, auf die Dauer ermüdende, Muskelanstrengung erzwingt, ist bei derselben Stellung der ganze Körper des Menschen in all seinen Theilen sehr annähernd im (labilen) Gleichgewicht balancirt. Die aufrechte Stellung ist, wie gesagt, eine Ruhestellung des Menschenkörpers, zu deren Erhaltung das geringste Mass von Muskelanstrengung erforderlich ist, ganz entsprechend der vierfüssigen Stellung der meisten Säugethiere oder der typisch halbrechten Haltung der Menschenaffen, bei welchen auch sie sich auf ihr vorderes Extremitätenpaar stützen. Für Maximaldauerleistungen nehmen Thier und Mensch diejenige Körperhaltung an, welche auf die Dauer für sich selbst am wenigsten Muskelleistungen in Anspruch nimmt, sodass, z. B. für rasche Flucht, von der im Ganzen dem Körper zur Ortsbewegung und Körperhaltung zu

Gebote stehenden Summe von Muskelkraft noch möglichst viel übrig bleibt. Bei raschester Flucht richtet sich der Mensch auf, aber auch der menschenähnliche Affe benützt dazu, wie die niederen Vierfüssler, seine vier Extremitäten. In dem dargelegten Sinne muss der Mensch aufrecht gehen, kein Säugethier muss das. Der Grund dafür liegt, wie wir gesehen haben, in der verschiedenen Art der Befestigung des Kopfes auf der Wirbelsäule.

Dafür ist nun die Lage des Hinterhauptsloches resp. der beiden zu seinen Seiten gelegenen Gelenkhöcker für das Atlasgelenk das entscheidende Moment: die typische mühelose menschliche Kopfhaltung und damit die gesammte mühelose aufrechte Körperhaltung wird durch die centrale Lage der Schädelcondylen an der Schädelbasis bedingt, die bei den menschenähnlichen Affen weit nach hinten rücken.

Für ein kausales mechanisches Verständniss dieses entscheidenden Unterschiedes im Skeletbau haben wir sonach die mechanische Ursache zu erforschen für die centrale Lage des Hinterhauptsloches (resp. der Condylen) bei dem Menschen einerseits und die Ursache der Verschiebung desselben auf die Hinterseite der Schädelbasis (resp. des Schädels) bei den anthropoiden Affen sowie bei allen anderen Wirbelthieren andererseits.

Die Frage nach der Kausalität der aufrechten Körperhaltung des Menschen spitzt sich sonach zu zu der Frage nach der mechanischen Ursache für die typische Stellung des Hinterhauptsloches am Schädelgrund.

In der schon oben (S. 3) erwähnten Untersuchung: Ueber einige gesetzmässige Beziehungen zwischen Schädelgrund, Gehirn und Gesichtsschädel ist mir der so lange vergeblich gesuchte Nachweis gelungen, dass die besondere Gestaltung des Schädelgrundes bei Mensch und Thier von dem relativen Grössenverhältniss des Gehirns zum Gesammtschädel ursächlich bedingt ist.

Bei der Formausgestaltung des Schädels der Vertebraten sind wesentlich die zwei Organsysteme betheiligt, welche überhaupt die gesammte Körperausgestaltung beherrschen: das Nervensystem und das Darmsystem, von ersterem zunächst, und für den Menschen immer überwiegend, das Gehirn, von dem zweiten die Kauwerkzeuge. In gegenseitiger Beeinflussung gestalten einerseits das Gehirn mit Sinnesorganen und andererseits die Kauwerkzeuge die specifische Schädelform.

Bei der ersten Anlage der definitiven Schädelform ist bei allen Säugern, wie eigentlich bei allen Vertebraten, das formgestaltende Prinzip das Gehirn, während der Einfluss der Organe des Darmsystems am Kopfe, der Kauwerkzeuge, sehr zurücktritt. Bei der ersten embryonalen Ausgestaltung des Kopfes, so lange dieselbe noch nicht stärker durch die Kauwerkzeuge beeinflusst wird, sind bei allen Säugethieren die Bildungsverhältnisse des Kopfes und seines Schädelgrundes in so hohem Grade menschenähnlich, dass man für manche Fälle sogar fast von Identität reden konnte. Bei allen Säugethieren geht die nähere Ausgestaltung der Kopfform von einem Stadium aus, welches man als anthropine Kopfform bezeichnen darf. Jene rel. frühe anthropine Periode ist dadurch charakterisirt, dass unter der stärkeren Beeinflussung der Wachsthumsenergie der Schädelbasis durch das übermächtig wachsende Gehirn, der dann noch weich bewegliche Schädelgrund in der Gesichtskopfbeuge eine scharfe Abknickung ungefähr in der Mitte der Schädelbasis erfährt. Die Knickungsstelle entspricht im Allgemeinen jener Knorpelfuge (Symphysis spheno-basilaris), durch welche der Basilartheil des Hinterhauptsbeines (pars basilaris oss. occ.) mit dem Körper des Keilbeins, wie R. Virchow schon vor mehr als einem Menschenalter bewiesen hat, auch noch bei Neugebornen und jugendlichen Individuen bis zu einem gewissen Grade beweglich verbunden ist. An dieser Fugenstelle ist

bei den Säugethierembryonen wie bei dem ungeborenen Menschen der Basilartheil des Hinterhauptsbeins gegen den Körper des Keilbeins winkelig abgeknickt, ein Verhältniss, welches bekanntlich Virchow als Sattelwinkel messend verfolgte.

Bei dem Menschen bleibt nun dieses embryonale Verhältniss während der ganzen Entwicklungsperiode sich wenig vermindernd vor der Geburt bestehen und erhält sich auch im nachembryonalen Leben nicht nur, sondern steigert sich unter dem steigenden Wachsthum des Gehirns noch weiter, sodass die Knickung der Schädelbasis bei dem Erwachsenen beträchtlich stärker ist als bei dem Neugebornen und wieder die primären embryonalen Verhältnisse erreicht. Bei der Kopfbildung des Menschen bleibt auch in den späteren Stadien der embryonalen Entwicklung, in welchen sich auch bei ihm der umgestaltende Einfluss der Kauwerkzeuge (d. h. der Organgruppe des Darmsystems) in gesteigertem Maasse geltend macht, die primär führende Rolle dem Gehirn gewahrt, die Schädelbasis bleibt geknickt. Bei der Kopfbildung der Thiere sehen wir dagegen bald die führende Rolle von dem in seinem Wachsthum relativ zurückbleibenden Gehirn auf die Organe des Darmsystems, die Kauwerkzeuge, übergehen. Dieses letztere Verhalten, welches sich schon im embryonalen Leben geltend macht, tritt immer greller hervor im nachembryonalen Leben bis zur Vollendung des Schädelwachsthums.

Die Knickung der Schädelbasis ist Wirkung des übermächtigen Gehirnwachsthums auf den Schädelgrund; tritt dieser gestaltende Einfluss des Gehirns mehr und mehr zurück, indem die relative Grösse des Gehirns (resp. der Hirnschädelkapsel) immer weiter gegen die fortgesetzt gesteigert wachsenden Kauwerkzeuge (Gesichtsschädel) zurückbleibt, so vermindert sich die Knickung der Schädelbasis mehr und mehr, bis der Verlauf ihrer sagittalen Mittellinie zuletzt ein vollkommen gerader, gestreckter

wird. Bei den niederen Säugethieren (Pferden, Rindern u. v. a.) biegt sich sogar in der Hinterhauptskeilbeinfuge der hintere Abschnitt der Schädelbasis, im umgekehrten Sinne wie der Sattelwinkel, nach aufwärts, einen nach oben offenen Winkel bildend.

Das mechanische Verhältniss dieser Abknickung ist im Sinne der bekannten His'schen Theorie einfach zu verstehen. Wir wissen z. B. aus den Untersuchungen Rüdingers über die Entstehung der Bogengänge im Labyrinth und aus anderen Beobachtungen mehr makroskopischer Art z. B. über die Ausbildung der embryonalen Schwanzkrümmung, dass, wenn von zwei mit einander verbundenen elastisch beweglichen Schichten die eine stärker wächst, das im Allgemeinen zu einer convexen Aufwärtswölbung dieser stärker wachsenden und zu einer concaven Einkrümmung der im Wachsthum zurückbleibenden Schichte führt. Ist die im Wachsthum zurückbleibende Schichte, wie in dem vorliegenden Falle relativ starr, nicht im Ganzen elastisch krümmbar, sondern nur an einer Stelle gleichsam wie in einem Scharniere beweglich, so erfolgt, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, keine im Allgemeinen concave Krümmung, sondern eine nach der schwächer wachsenden Schichte hin offene winkelige Abknickung. Umgekehrt, wenn das Wachsthum der anfänglich stärker wachsenden Schichte mehr und mehr von der anfänglich schwächer wachsenden Schichte eingeholt und schliesslich übertroffen wird, so gleicht sich diese Knickung wieder aus, die den Verlauf repräsentirende Mittellinie der anfänglich schwächer wachsenden und daher eingeknickten Schichte streckt sich endlich gerade und wenn das Verhältniss der Wachsthumsenergie in den beiden betreffenden Schichten sich umkehrt, so tritt eine Knickung in der entgegengesetzten Richtung ein.

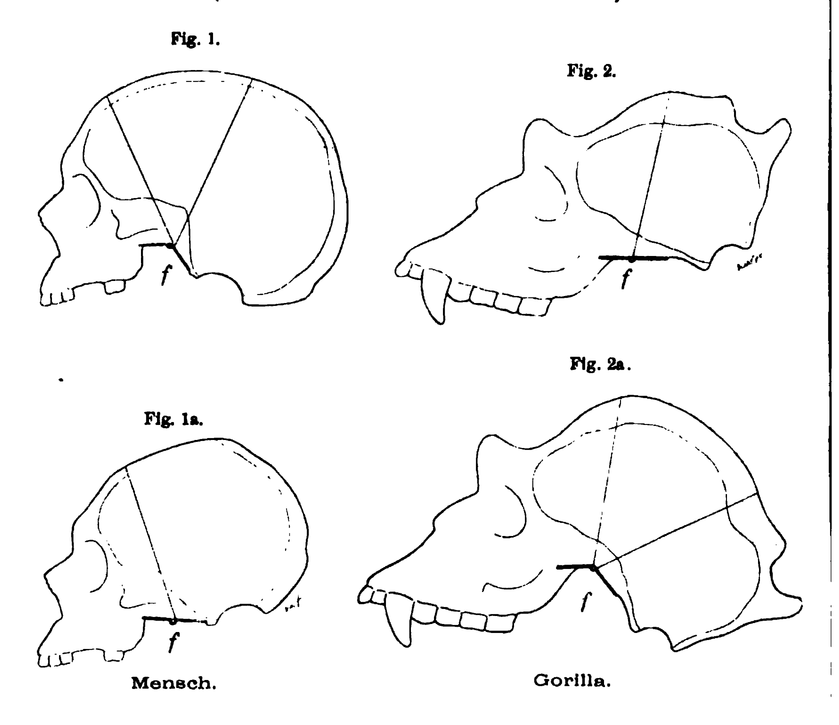
Aus meinen schon citirten Untersuchungen über den Schädelgrund hat sich aus zahlreichen Messungen ergeben,

dass je grösser im Verhältniss zu dem übrigen Schädel die Hirnkapsel, resp. das diese erfüllende Gehirn, ist, dass um so menschenähnlicher die Knickung der Schädelbasis ist. Mit der relativen Zunahme des Gehirns zum Gesammtschädel knickt sich thatsächlich, wie bei dem Menschen nach der Geburt leicht nachweislich ist, die Schädelbasis in der Hinterhaupts-keilbeinfuge, Synchondrosis sphenobasilaris, um so stärker ab; mit der relativen Abnahme des Gehirns im Verhältniss zum Gesammtschädel, wie das in immer steigendem Maasse sich bei Anthropoiden und allen anderen Säugethieren ausbildet, gleicht sich äusserlich die Knickung mehr und mehr aus und geht schliesslich in die entgegengesetzte Knickung über.

So zeigen auch die Schädel des Gorilla, des Orangutan, des Schimpanse im erwachsenen Zustand, wenn sich die bei ihnen wie bei allen Säugethieren primär typisch menschliche Schädelform vollkommen in die Thierform umgebildet hat, äusserlich einen horizontalen flächenhaften Verlauf der Schädelbasis. Es gibt sich das besonders deutlich an der Stellung des Basilartheils des Hinterhauptbeins, pars basilaris ossis occip., zu erkennen, welches sich vorne durch die erwähnte Knorpelfuge, wie gesagt in der Jugend beweglich, mit dem Körper des Keilbeins verbindet und nach hinten den Vorderrand des grossen Hinterhauptloches bildet.

Bei der flachen gestreckten Lage des Basilartheils des Hinterhauptbeins rückt sonach das Hinterhauptloch — wie ein Blick auf die schematische Zeichnung S. 20, Fig. 2 u. 1a lehrt — an die Rückseite des Schädels; mit einer nach oben offenen Knickung der Schädelbasis gelangt das Hinterhauptloch ganz auf die Rückseite des Hinterhaupts. Mit dem übermächtig sich entwickelnden Gehirn, welches die Schädelbasis in einem nach unten offenen Winkel abknickt, gelangt das Foramen magnum mehr auf die Unterseite des Schädels und rückt endlich bei dem Menschen in der Zeit, in welcher er laufen lernt, in seine typisch centrale Stellung in der Schädelbasis ein, Fig. 1.

Man kann von diesem mechanischen Vorgang leicht eine schematische Vorstellung gewinnen. Gehen wir von einer menschlichen Schädelkapsel, Fig. 1, aus, deren Schädelbasis wir durch ein Scharnier in der Hinterhauptkeilbeinfuge *f* beweglich gemacht haben und schneiden quer ein keilförmiges Stück heraus (die Schneide dieses Keils an der Sphenobasilar-



fuge, den breiten convex von dem betreffenden Ausschnitt des Schädeldaches begrenzten Theil nach oben), so können wir in dem Scharnier der Sphenobasilarfuge den nach diesem Ausschnitt übrig bleibenden vorderen und hinteren Theil des Schädels an einander legen. Ich habe die Grösse des ausgeschnittenen Keils so gewählt, dass der übrig bleibende Hirnraum der Schädelkapsel dem eines erwachsenen männlichen

Gorilla entspricht. Die direkte Beobachtung ergibt nun, dass durch die eben beschriebene Aneinanderlagerung der beiden Reststücke der verkleinerten Schädelkapsel die Schädelbasis flach gelegt wird. Der Basilartheil des Hinterhauptbeins legt sich flach und das Hinterhauptloch rückt an die Hinterseite des Schädels. Wir haben damit durch entsprechende Verkleinerung des Hirnraumes, entsprechend einer Verkleinerung des Gehirns selbst, den Menschenschädel in Beziehung auf die Stellung des Hinterhauptlochs in die typische Form des Anthropoidenschädels (Gorillaschädels) umgestaltet (Fig. 1a). Die Schädelbasis ist bei den menschenähnlichen Affen (Gorilla) nicht kleiner und kürzer, sondern im Allgemeinen sogar etwas grösser und länger als bei dem Menschen. Setzen wir in unserem Schädelmodell den ausgeschnittenen Keil wieder ein, so rückt durch die damit erzeugte Vergrösserung des Gehirnraums des Schädels, resp. durch die relative Vergrösserung des Gehirns im Verhältniss zu dem Gesichtsschädel resp. den Kauwerkzeugen, das Hinterhauptloch wieder in die für den Menschen typische centrale Lage in der Schädelbasis ein.

Schneidet man in ähnlicher Weise, wie wir das bei dem Menschenschädel gethan haben, eine Schädelkapsel eines menschenähnlichen Affen (Gorilla) in der Mitte von rechts nach links quer bis zur Sphenobasilarfuge durch, die wir wieder in einem Scharnier beweglich machen (wie Fig. 2 demonstrirt), und setzen nun den aus dem Menschenschädel ausgeschnittenen Keil, um den Gehirnraum des Affenschädels dem des Menschen gleich zu machen, in den Affenschädel ein, so wird der Hinterhauptstheil im Ganzen nach abwärts gedrückt, der Basilartheil des Hinterhauptsbeins knickt sich in der Fuge gegen das Keilbein ab und das Hinterhauptsloch rückt damit in die für den Menschen typische centrale Lage an der Schädelbasis (Fig. 2a): Wir haben aus dem Affenschädel, in Beziehung auf die Stellung des Hinterhauptsloches, einen Menschenschädel gemacht.

Dass der Gorillaschädel dadurch im Ganzen nicht menschenähnlicher aussieht, beruht darauf, dass seine colossal entwickelten Fresswerkzeuge thierisch vorstehen. Bei der menschlichen Schädelform kommt eben neben der übermächtigen Gehirnentwicklung, Makroencephalie, noch etwas Anderes in Frage: eine typische Minderentwicklung der Fresswerkzeuge, eine extreme Mikrognathie, welche sich z. Th. daraus erklärt, dass bei dem Menschen schon in einer relativ sehr frühen Periode der embryonalen Entwicklung die Nähte zwischen Ober- und Zwischenkiefer verwachsen, auf deren Offenbleiben auch im nachembryonalen Leben bei den Säugethieren etwa ebenso die Möglichkeit eines gesteigerten Wachsthums der knöchernen Fresswerkzeuge beruht, wie das nachembryonale Wachsthum des Gehirnschädels mit dem Gehirn bei dem Menschen durch das Offenbleiben der Hirnschädelnähte möglich wird, in einer Lebensperiode, in welcher bei den Thieren, auch den anthropoiden Affen, meist längst schon die Verwachsung der Hirnschädelnähte[1]) erfolgt ist.

So schematisch die eben gegebenen Darstellungen über die ursächlichen Momente für die Stellungsverschiedenheiten des Hinterhauptlochs bei dem Menschen und den menschenähnlichen Affen (sowie allen anderen Wirbelthieren) auch erscheinen mögen, so genügen sie im Zusammenhalt mit den früheren Ergebnissen der Untersuchung über den Schädelgrund, um den Beweis zu liefern, dass die centrale Stellung des Hinterhauptlochs bei dem Menschen mechanisch bedingt ist durch die den Menschen charakterisirende Gehirnentwickelung.

Auf der centralen Lage des Hinterhauptlochs an der Schädelbasis, d. h. der beiden seitlich von ihm stehenden Gelenkhöcker des Schädels, der Condylen, welche mit der Wirbelsäule im Atlasgelenke sich verbinden, beruht aber

[1]) J. Ranke, l. c. S. 46. ff.

mechanisch die Möglichkeit der mühelosen Balancirung des Schädels bei der aufrechten Körperhaltung und damit der typischen aufrechten Ruhestellung des menschlichen Körpers im Ganzen, durch welche dann weiter seine specifische äussere und innere Körper- und Organgestaltung bedingt ist.

Die für den Menschen typische aufrechte Ruhestellung des Körpers, der aufrechte Gang, ist sonach mechanisch bedingt durch die übermächtige Entwickelung seines Gehirns.

Damit erscheint aber auch die gesammte typisch-menschliche Körperentwickelung von dem Gehirn mechanisch beherrscht und geleitet. Dazu kommt noch, dass das Gehirn nicht nur die typische Körperform sondern auch die psychische Stellung des Menschen in der animalen Welt begründet.

Wir können dieses Gesammtverhältniss wohl nicht schärfer als mit dem schon von Richard Owen gefundenen Worte: Archencephalie,[1]) Hirnherrschaft, bezeichnen.

---

[1]) Owen, The anatomy of vertebrates. Vol. II, S. 274, 1866: Archencephala, ἄρχω, I overrule; ἐγκέφαλος, brain.



Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten.

Von **Ludwig Boltzmann** in Wien.

(*Eingelaufen 5. Januar.*)

Wenn ich in meiner kurzen Notiz über den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes[1]) von einer Ungenauigkeit in der Darstellung in Kirchhoff's Vorlesungen über Wärmetheorie sprach, so meinte ich damit nicht die Redaktion derselben durch Herrn Planck, sondern den Inhalt des Buches selbst, welches ja wie alle Vorlesungen vornehmlich den Zweck hat, von andern gefundene Sätze in neuer Form darzustellen.

Die Spitze meiner Notiz war überhaupt nicht gegen eine Person, sondern lediglich gegen einen Beweis gerichtet, den ich nicht für beweisend halte. Herr Planck gab demselben nun eine vielversprechende Abänderung.[2])

Sei jedes von den folgenden Bestimmungsstücken Grösse und Richtung der Geschwindigkeit jedes der stossenden Moleküle vor dem Stosse, Richtung der Centrilinie im Momente des Stosses zwischen gewissen unendlich nahen Grenzen eingeschlossen (was wir die Bedingungen A nennen wollen). Dann werden dieselben Bestimmungsstücke nach dem Stosse ebenfalls zwischen gewissen unendlich nahen Grenzen liegen (sagen wir die Bedingungen B erfüllen). Wenn das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten herrscht, so ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit eines Zusammen-

---

[1]) Diese Sitzungsberichte Bd. 24, Heft 2, Wied. Ann. Bd. 53, p. 955, 1894.

[2]) Diese Sitzungsberichte Bd. 24, Heft 4, November 1894.

stosses, für den die Bedingungen A erfüllt sind, gleich der eines Zusammenstosses, für den sonst genau die Bedingungen B gelten, nur dass die Richtung der Centrilinie umgekehrt, also die Orte der beiden stossenden Moleküle im Moment des Stosses vertauscht sind.

Wenn man aber nicht eine neue Analyse zu Hülfe nimmt, kann man nicht beweisen, dass es nicht noch andere Vertheilungsgesetze gibt, für welche zwar obiges nicht gilt, aber doch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül eine gewisse, bestimmt gerichtete Geschwindigkeit durch irgend welche sonst wie immer beschaffene Zusammenstösse verliert, noch immer gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Molekül eine gleiche, gleichgerichtete Geschwindigkeit durch irgend welche Zusammenstösse erhält.[1] Unter diesen Vertheilungsgesetzen könnten beliebig viele sein, für welche jede Geschwindigkeit gleich wahrscheinlich, wie die gleiche, entgegengesetzt gerichtete wäre. Jede durch die letztern Vertheilungsgesetze dargestellte Zustandsvertheilung würde durch eine plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten nicht verändert. Aus einer derartigen Umkehrung auf das dynamische Gleichgewicht gezogene Schlüsse haben oft viel Bedenkliches.[2] Im vorliegenden Falle aber scheint die Umkehrung in der That alle möglichen Phasen der Zustandsvertheilung wieder in alle Phasen überzuführen und daher die Veränderung der Wahrscheinlichkeit irgend eines Zusammenstosses durch die Umkehrung unmöglich.

---

[1]) für welche also in der Formel 16) meiner „weitern Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen", Wiener Sitzungsberichte Bd. 66, 10. Oct. 1872, das doppelte Integrale verschwindet, ohne dass die Grösse unter dem Integralzeichen für alle Werthe der Variabeln identisch gleich Null ist.

[2]) Vergl. Boltzmann, Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmelehre II, Wiener Sitzungsberichte Band 75, Jänner 1877; Nature, febr. 1895; Culverwell, Burbury, Bryan, Nat. oct.—dec. 1894.

Zur Kenntniss des Befruchtungsvorganges.

Von **J. Rückert.**

(*Eingelaufen 5. Januar.*)

Bei einer Untersuchung der sich furchenden Eier von Cyclops strenuus traf ich auf ein eigenthümliches Verhalten der Kerne, das in naher Beziehung zum Befruchtungsvorgang steht und von mir im Folgenden geschildert werden soll.

An die grundlegende Entdeckung O. Hertwig's, dass der wesentliche Vorgang bei der Befruchtung in einer Vereinigung der Kerne der beiden Geschlechtszellen beruht, knüpft sich naturgemäss die weitere Frage nach der Art und Weise dieser Verbindung. Besteht dieselbe in einer völligen Verschmelzung, in einer Vermischung der Substanzen beider Geschlechtskerne oder nur in einer Aneinanderlagerung derselben, derart, dass die von den beiden Erzeugern gelieferten Kernbestandtheile sich innerhalb der Kerne des neuen Organismus selbständig erhalten? Wenn wir von dem sogenannten „ersten Furchungskern“ absehen, so spricht der äussere Anschein sehr gegen die letztere Ansicht, denn die Furchungskerne, ebenso wie die Kerne der späteren Embryonalzellen und der fertigen Gewebszellen, erweisen sich, soweit man dieselben bis jetzt kennt, als völlig einheitliche Gebilde, welche von einer Zusammensetzung aus 2 Hälften nichts bemerken lassen. So nahmen denn auch O. u. R. Hertwig eine innige Verschmelzung der beiden Geschlechtskerne an und betrachteten dieselbe sogar als einen wesentlichen und nothwendigen Akt bei der Befruchtung. In einer von beiden

Forschern gemeinsam herausgegebenen Schrift[1]) heisst es: „Nur dann, wenn die Substanzen von Ei- und Spermakern sich ganz durchdringen, entstehen Kerne, welche mit allen für die weitere Entwicklung nöthigen Lebenseigenschaften ausgerüstet sind.“ An dieser Auffassung hält O. Hertwig auch noch in einer späteren Arbeit[2]) fest, nur verlegt er hier mit Rücksicht auf van Beneden's Befunde bei Ascaris die Verschmelzung nicht mehr auf den Moment, in welchem die bläschenförmigen Vorkerne zusammentreffen, sondern auf den Zeitraum nach Ablauf der ersten Furchungstheilung.

van Beneden selbst ist hierin anderer Meinung. Aus seiner wichtigen Entdeckung,[3]) dass bei Ascaris megalocephala (bivalens) die Vorkerne, ohne mit einander zu verschmelzen, sich in je zwei Chromosomen umwandeln, von denen bei der ersten Furchungstheilung in jeden Tochterkern eine Spalthälfte gelangt, zog er neben anderen bedeutsamen Schlussfolgerungen auch diejenige, dass in den zwei ersten Furchungskernen die zwei väterlichen und zwei mütterlichen Chromosomen in getrennten Gruppen neben einander sich befinden. Und er vermuthete weiter, dass wie die erste, so sich alle folgenden Kerngenerationen verhalten möchten, d. h. dass auch in ihnen die vom Vater und der Mutter abstammenden Kernsubstanzen sich von einander gesondert erhalten. Er stützte diese Annahme auf die weitere Beobachtung,[4]) dass der Mutter-

---

1) O. u. R. Hertwig: Ueber den Befruchtungs- und Theilungsvorgang des thierischen Eies unter dem Einfluss äusserer Agentien. Jena 1887.

2) O. Hertwig: Vergleich der Ei- und Samenbildung bei Nematoden. Eine Grundlage für celluläre Streitfragen. Arch. f. m. A., Bd. 36, 1890.

3) E. van Beneden: Recherches sur la maturation de l'oeuf, la fécondation et la division cellulaire. Arch. de Biol. T. IV, 1883.

4) E. van Beneden et A. Neyt: Nouvelles Recherches sur la fécondation et la division mitosique chez l'Ascaride Mégalocephale. Bull. de l'Acad. roy. de Belgique. 1887.

knäuel in den Furchungskernen von Ascaris meg. bivalens nicht einen continuirlichen Faden bildet, sondern zunächst zwei Fadenstücke, deren jedes alsdann durch Quertheilung zwei Chromosomen liefert. Möglicherweise, so meint van Beneden, entspricht jedes dieser beiden Fadenstücke den zwei Chromosomen eines Vorkerns. Den Beweis dafür konnte er freilich an diesem Object nicht erbringen, und es hat daher die andere Möglichkeit, dass jedes Fadenstück ein väterliches und ein mütterliches Chromosoma enthält, vorläufig ebensoviel Wahrscheinlichkeit für sich. Uebrigens bestreitet Boveri[1]) die letztere Beobachtung van Beneden's und Neyt's entschieden und gibt an, dass die vorübergehende Verbindung je zweier Chromosomen zu einem einzigen, in sich geschlossenen, Faden nur eine scheinbare ist, hervorgerufen durch dichte Aneinanderlagerung derselben. Man kann daher aus van Beneden's Untersuchungen nur folgern, dass die väterlichen und mütterlichen Chromosomen getrennt in das Ruhegerüst der zwei ersten Furchungskerne eingehen, ob sie aber aus diesem als gesonderte Gruppen bei der nächsten Theilung wieder hervortreten, das ist nicht gezeigt. Gerade hierauf aber kommt es an, denn in dem zwischen die zwei Theilungen eingeschobenen feinfadigen Ruhegerüst kann eine Vermischung des väterlichen und mütterlichen Chromatins stattfinden.

Es scheint somit, dass bei Ascaris unsere Frage überhaupt nicht zu lösen ist, denn würden hier zwei den Vorkernen entsprechende Abtheilungen in den Furchungskernen unterscheidbar sein[2]) so wäre dies kaum den vortrefflichen Beobachtern entgangen, die sich gerade mit diesem Objekt

---

[1]) Boveri: Zellenstudien. Heft 2. Jena 1888.

[2]) Nur um diese rein empirisch festzustellende Frage handelt es sich für mich, nicht aber um die von van Beneden damit verknüpfte Ersatztheorie und Lehre vom Hermaphroditismus der Zellkerne. Auch die von Rabl, namentlich aber von Boveri vertretene Ansicht von der Individualität der Chromosomen, der ich

befasst haben. Hingegen dürfte der von mir untersuchte Cyclops strenuus in dieser Hinsicht günstigere Untersuchungsverhältnisse bieten, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Ich fand in der ersten Furchungsspindel dieses Copepoden in derjenigen Phase, in welcher die Tochterplatten auseinanderzuweichen beginnen, die den Vorkernen entsprechenden Chromatinportionen durch einen deutlichen Spalt getrennt. Leider treten die Spindelfasern an meinen mit Sublimat fixirten Objekten nicht so scharf hervor, dass man entscheiden könnte, ob auch die Spindel sich aus zwei solchen Hälften zusammensetzt. Häcker[1]) hat bei Cyclops strenuus eine jüngere Theilungsphase des ersten Furchungskerns, nämlich „den Uebergang aus dem Bläschen- in das Asterstadium" beobachtet und gibt an, dass hier „die Anlagen von zwei gesonderten Kernspindeln mit vier Centrosomen zu bestehen scheinen." Er bildet auch (l. c. Fig. 27a) zwei Spindeln ab, die nur im Bereich des Aequator zusammenhängen, gegen die Pole zu aber weit auseinander liegen. Es wäre von grossem Interesse zu erfahren, ob hier wirklich, wie es den Anschein hat, jeder Vorkern seine eigene Spindel bildet. Auf Grund meines jetzigen Materials kann ich zu dieser Frage keine bestimmte Stellung einnehmen, denn wenn die von mir beobachteten älteren Spindeln überhaupt aus zwei scharf gesonderten Hälften bestehen, dann sind die letzteren

mich selbst mit angeschlossen habe, berührt sich zwar mit der vorliegenden Frage, deckt sich aber mit ihr keineswegs. Denn es wäre einerseits möglich, dass die Vorkerne sich selbständig erhalten, die Chromosomen innerhalb derselben aber nicht, eine Anschauung, die van Beneden vertritt. Aber auch das Umgekehrte wäre denkbar: es brauchen sich die Chromosomen nicht aufzulösen, aber sie könnten sich doch derartig untereinander verlagern und vermengen, dass die den Vorkernen entsprechenden Gruppen alsbald verloren gehen.

[1]) Häcker: Die Eibildung bei Cyclops und Canthocamptus. Zool. Jahrb. A. f. A. u. O., Bd. V.

doch sicher mit ihren Polen viel dichter aneinander gerückt als in Häcker's Figur. Die Attraktionssphären allerdings erscheinen hier, sowie auch in den folgenden Furchungstheilungen von auffallender Breite, so dass der Gedanke aufkommen könnte, sie möchten aus je zwei nebeneinander gelegenen Sphären hervorgegangen sein. Andererseits darf aber nicht unerwähnt bleiben, dass ich in dem Befruchtungsstadium, in welchem die noch bläschenförmigen Vorkerne sich berühren, im Ganzen stets nur zwei Sphären fand, für jeden Theilungspol eine einzige, und dass ich diese genetisch auf den Spermakern zurückverfolgen konnte.

Nachdem die Tochterplatten der ersten Furchungsspindel gegen die Pole der Theilungsfigur gerückt sind, finde ich in ihnen die väterlichen und mütterlichen Chromosomengruppen noch weiter von einander getrennt als vorher. Da die Verbindungsfäden sich nur zwischen den correspondirenden Hälften der Tochterplatten ausspannen, so erscheint bei Seitenansicht auch dieser mittlere Abschnitt der Theilungsfigur durch einen breiten Spalt in zwei Hälften zerlegt. Bei Polansicht lassen sich in jeder Hälfte einer Tochterplatte 11 oder 12 Chromosomen zählen, nicht 4, wie Häcker für die Aequatorialplatte der ersten Theilung von Cyclops strenuus angibt und abbildet. Im Ganzen enthält also jede Tochterplatte des ersten Furchungskernes die Normalzahl von 22 oder 24 Chromosomen, was mit den von mir[1]) bei der Eireifung gefundenen Zahlenverhältnissen übereinstimmt.

Wenn dann weiterhin das Chromatin der Tochterplatten sich in ein Ruhegerüst umwandelt, tritt eine Anzahl bläschenförmiger Unterabtheilungen auf, die anfänglich offenbar den einzelnen Chromosomen des Dyasters entsprechen, wie dies schon für die Furchungskerne bei anderen Objekten wiederholt beschrieben wurde. Die Bläschen beginnen schon früh-

[1]) Rückert: Zur Eireifung bei Copepoden. Anat. Hefte 1894.

zeitig zu confluiren und zwar innerhalb ein und desselben Kerns in ungleichem Tempo. So möchte ich es wenigstens erklären, dass man neben kleineren, meist peripher gelegenen Bläschen in der Regel auch einige grössere antrifft, welche häufig durch vollständige oder unvollständige Scheidewände wieder in Unterabtheilungen zerlegt erscheinen. Indem schliesslich alle Abtheilungen zusammenfliessen und die unregelmässigen Vorbuchtungen und Zerklüftungen der Kernoberfläche verschwinden, tritt eine einheitliche Kernblase auf. Bei diesem Vorgang, der nicht nur nach Ablauf der ersten, sondern auch der späteren Furchungstheilungen zu beobachten ist, macht sich die Zusammensetzung des Kerns aus zwei Hälften bemerkbar. Zwar rücken die den Vorkernen entsprechenden Abtheilungen jetzt dicht zusammen, aber man kann sie bei einigermassen günstiger Lagerung des Kerns doch noch recht deutlich unterscheiden, namentlich bei Anwendung schwächerer Vergrösserung, bei welcher man einen besseren Ueberblick über den gesammten Kern erhält als mit Hilfe der Immersion. Wenn die erwähnten Unterabtheilungen des Kerns schon confluirt sind, und ein einheitliches Ruhegerüst aufgetreten ist, lässt sich die Grenze der beiden ursprünglichen Kernhälften in Gestalt einer Scheidewand noch erkennen, welche senkrecht zum grössten Durchmesser des länglichen Kerns steht. Diesen Zustand der beiden ersten Furchungskerne hat Häcker (l. c.) schon bei Cyclops tenuicornis gesehen und dahin gedeutet, dass die zwei Abtheilungen des Kerns selbständig gebliebene Abkömmlinge der Geschlechtskerne seien. Solange die vorausgegangenen Theilungsphasen nicht bekannt waren, konnte man die Berechtigung dieser Auffassung anzweifeln, nachdem sich aber jetzt bei Cyclops str. die beiden Kernhälften an einer lückenlosen Entwicklungsserie von der ersten Furchungsspindel bis zur Ruhephase der Tochterkerne haben verfolgen lassen, erscheint dies nicht mehr möglich.

Aus der Ruhephase der zwei ersten Furchungskerne konnte ich nur wenige Eier untersuchen, die demselben Thier angehören und sich daher auch in genau dem gleichen Entwicklungszustand befinden. Ich kann daher nicht sagen, ob im weiteren Verlauf der Ruhephase die Trennung der beiden Kernhälften aufgehoben wird. Sicher aber ist, dass beim Uebergang zum Knäuel der zweiten Theilung von einer Scheidewand innerhalb des Kernraumes an meinen Präparaten nichts mehr zu sehen ist. Nur an der Kernmembran fand ich bei einem Theil der Objekte an der betreffenden Stelle noch eine Einkerbung. Der Chromatinknäuel selbst erscheint bei einigen Kernen einheitlich, bei anderen in zwei Hälften zerlegt. Das Gleiche gilt für die Aequatorialplatte der zweiten Furchungsspindel. Im Dyaster hingegen liess sich wieder die Zusammensetzung der länglichen Tochterplatte aus zwei Hälften in der Mehrzahl der Kerne mit aller Deutlichkeit erkennen. Es ist offenbar in dieser Theilungsphase ein Auseinanderweichen der Kernhälften leichter möglich, als in der Aequatorialplatte, was sich aus der Mechanik des Theilungsvorganges erklären lässt. Auch im Dyaster der zweiten Furchungstheilung war ich im Stande, bei Polansicht das oben mitgetheilte Zahlenverhältniss der Chromosomen für beide Hälften der Tochterplatte festzustellen, so dass die Ableitung der letzteren von den Vorkernen nicht bezweifelt werden kann. Es wird hierdurch die eingangs aufgestellte Frage, ob aus den Ruhekernen der ersten Theilung die väterlichen und mütterlichen Chromosomen wieder in getrennten Gruppen hervorgehen können, in bejahendem Sinne entschieden.

Von der dritten Theilung habe ich den Dyaster nicht zu Gesicht bekommen, doch konnte ich im Mutterknäuel und in der Aequatorialplatte für einen Theil der Kerne noch ebenso eine Zusammensetzung aus zwei Hälften nachweisen wie bei der zweiten Theilung. In den folgenden Furchungs-

stadien wird diese Erscheinung während der eigentlichen Theilungsphasen immer seltener, und nur noch beim Uebergang zur Ruhephase treten die Kernhälften in der oben beschriebenen Weise hervor. Oft sieht man ausser der Scheidewand auch an der Oberfläche der länglichen Kerne eine Einschnürung, wodurch das ganze Gebilde Bisquit- resp. Bohnenform erhält. Diese Einkerbung bleibt, nachdem die Scheidewand geschwunden, oft noch als einziges Merkmal der ursprünglichen Trennung erhalten. Zuweilen erscheint auch die eine Kernhälfte intensiver gefärbt als die andere, offenbar weil ihr Chromatin sich noch im Zustande stärkerer Concentration befindet. Da diese Doppelkerne sich im Wesentlichen noch ebenso verhalten, wie diejenigen, welche nach Ablauf der ersten und zweiten Theilung auftreten, so müssen sie auch in dem gleichen Sinne wie jene gedeutet werden. Der Umstand, dass während der mittleren Furchungsstadien die Duplicität der Kerne bloss bei Eintritt der Kernruhe, in den eigentlichen Theilungsphasen dagegen nur mehr ausnahmsweise sichtbar ist, beweist nichts gegen die vorgetragene Auffassung. Es lässt sich vielmehr diese Erscheinung in ungezwungener Weise damit erklären, dass die Chromosomen innerhalb der karyokinetischen Figuren zu dieser Zeit schon dichter gelagert sind, als während der ersten Theilungen, ein Verhalten, das offenbar auf die zunehmende Verkleinerung des Zellenleibes und die dadurch bedingte Raumbeengung zurückzuführen ist.

In späten Furchungsstadien und während der Keimblätterbildung weist ein immer kleiner werdender Bruchtheil der im Ei vorhandenen Kerne eine Zusammensetzung aus zwei Hälften auf. Doch konnte ich vereinzelte solcher Kerne soweit verfolgen, als ich meine Untersuchungen überhaupt ausgedehnt habe, nämlich bis zu dem Stadium der dreigliedrigen Larvenanlage. Es muss daher die Möglichkeit zugegeben werden, dass schon während der Furchung eine

totale Verschmelzung und Vermischung der beiden ursprünglichen Kernhälften eintritt, wenigstens bei einem Theil der Kerne, während bei den übrigen dieser Vorgang erst später einsetzen würde. Mindestens ebenso berechtigt erscheint aber die gegentheilige Auffassung. Nur während der ersten Furchungszeit theilen sich sämmtliche Kerne des Eies gleichzeitig, später dagegen nur mehr ein Theil derselben und dieser Bruchtheil wird immer geringer, je weiter die Entwicklung fortschreitet. Man darf daher gar nicht voraussetzen, in vorgerückteren Entwicklungsstadien eine grössere Anzahl von Kernen in dem für unsere Untersuchung geeigneten Zustand anzutreffen. Dafür muss man aber erwarten, einige wenige derselben in einem jeden derartigen Ei vorzufinden. Man begegnet aber auch hier bei genauerem Zusehen wohl stets einigen Kernen, welche die Spuren einer Zusammensetzung aus zwei Stücken erkennen lassen.

Es sind mehrere Forscher darauf ausgegangen, der Zelle einen bilateral symmetrischen Bau zu vindiciren, indessen haben derartige Versuche sich bisher als nicht durchführbar erwiesen. Die bei Cyclops vorhandenen Doppelkerne zeigen nun eine bilaterale Symmetrie. Und wenn die Zusammensetzung des Kerns aus zwei Hälften während der Mitose sichtbar ist, was für die ersten Furchungstheilungen von Cyclops gilt, dann liegt eine bilaterale Symmetrie der gesammten Zelle vor, von dem Augenblicke an, in welchem die Einstellung der Chromosomen in den Aequator der Spindel vollendet ist. Die Symmetrieebene schneidet die Aequatorialplatte resp. die Tochterplatten in einem Winkel von 90° und theilt sie in zwei Hälften, deren eine vom männlichen, deren andere vom weiblichen Vorkern abstammt.

Die mitgetheilten Beobachtungen beziehen sich nur auf embryonale Zellen. Es wäre von Interesse zu wissen, ob sie auch für die Gewebszellen des fertigen Thieres Geltung besitzen. Eine Untersuchung in dieser Richtung verspricht

indess von vornherein wenig Erfolg wegen der geringen Grösse der betreffenden Kerne; ist doch schon die Beurtheilung der älteren Embryonalstadien aus diesem Grunde sehr erschwert. Im ausgebildeten Thier existirt nur eine einzige Art von Zellen, in welchen das Chromatin innerhalb eines verhältnissmässig sehr grossen Kernraumes liegt; es sind das die reifenden Eizellen. Wenn sich die väterlichen und mütterlichen Chromosomengruppen bis in diese Zellgeneration selbständig erhalten würden, dann könnten sie hier, wo sie einer räumlichen Beengung nicht mehr unterworfen sind, auch gesondert zum Vorschein kommen und zwar von dem Zeitpunkt ab, in welchem die kurzen und compacten Chromosomen der ersten Richtungsspindel aus dem feinfadigen Keimbläschengerüst hervorgegangen sind. In der That zeigen nun bei Cyclops diese Chromosomen, wenn sie aus der Peripherie des Keimbläschens gegen den Aequator der zukünftigen Richtungsspindel vorrücken, eine Gruppirung, die sehr auffallend ist und schon von Häcker und später mir selbst erwähnt und abgebildet wurde, ohne dass jedoch einer von uns sie zu der vorliegenden Frage in irgend welche Beziehung gebracht hätte. In mehreren seiner Arbeiten stellt Häcker[1]) Keimbläschen dar, in deren Peripherie, an zwei gegenüberliegenden Punkten, sich eine Anhäufung von vier chromatischen Doppelstäben befindet. Dass diese Gruppirung der Chromosomen in Häcker's Präparaten eine sehr reguläre gewesen sein muss, geht nicht nur aus seinen Abbildungen sondern auch aus der Deutung hervor, welche er der Erscheinung gab. Er betrachtete die 2 Gruppen als die Tochterplatten der eben vollzogenen Richtungstheilung, eine Auffassung, die, wie ich an anderer Stelle (l. c.) gezeigt habe,

---

[1]) l. c. Fig. 22. Derselbe: Das Keimbläschen, seine Elemente und Lageveränderungen. I. Arch. f. m. A. Bd. 41. Fig. 11. Derselbe: Die Kerntheilungsvorgänge bei der Mesoderm- und Entodermbildung von Cyclops. Ibidem Bd. 39, Fig. 31.

schon desshalb nicht richtig ist, weil die erste Richtungstheilung in dem fraglichen Stadium sich erst vorbereitet. Ich selbst[1]) habe mir diese Gruppenbildung der Doppelstäbe, die übrigens an meinen Objekten zahlreichen individuellen Schwankungen unterliegt, früher nicht erklären können. Nachdem sich aber jetzt herausgestellt hat, dass sich in den Kernen der befruchteten Cyclopseier zwei den Vorkernen entsprechende Abtheilungen über eine Anzahl von Furchungstheilungen hinaus gesondert erhalten können, liegt es nahe, die räthselhaften Chromosomengruppen des reifenden Eies auf diese Abtheilungen zu beziehen. Das Zusammentreffen der beiden Erscheinungen ist jedenfalls ein so auffälliges, dass man es nicht unberücksichtigt lassen darf. Auf der andern Seite muss aber ausdrücklich betont werden, dass die Gruppenbildung individuell variirt. Dass eine Gruppe wieder in Unterabtheilungen aufgelöst sein kann, scheint mir weniger von Belang, wenn dies Verhalten auch zu Beginn des betreffenden Reifungsstadiums die Orientirung oft erschwert und zuweilen unmöglich macht. Mehr in Betracht kommt das Zahlenverhältniss zwischen beiden Hauptgruppen. Zu Anfang des Stadiums ist die Zählung der Doppelstäbe schwierig, und kann ich daher nicht angeben, ob die Gesammtzahl derselben im Keimbläschen 11 oder 12 beträgt. Wenn die Einstellung in den Aequator der Spindel fast vollendet ist, finde ich stets 11. Nur bei einem Theil dieser Eier stehen die beiden Gruppen in dem Verhältniss von 5 : 6, bei anderen fand ich 4 : 7 und sogar 3 : 8. Man müsste also, wenn man die Gruppen auf die ursprünglichen Kernhälften bezieht, jedenfalls die Möglichkeit zulassen, dass in individuell wechselnder Weise einzelne Chromosomen aus der einen Gruppe sich loslösen und sich der anderen anschliessen. Ohne auf die Consequenzen einzugehen, welche sich hieraus für den Reductions-

[1]) l. c. Fig. 12 und 15.

vorgang ergeben würden, möchte ich doch zu erwähnen nicht unterlassen, dass gerade die berührten individuellen Differenzen sich mit einer Vererbungsthatsache (Ungleichheit der successiven Kinder eines Elternpaares) in Einklang setzen liessen, welche von mehreren Forschern (Weismann, Boveri) mit der Chromosomenreduction in Verbindung gebracht wird. Durch welche Einrichtungen in der Kernstruktur die Gruppenbildung hervorgerufen oder erhalten wird, ob durch achromatische, nicht sichtbare Verbindungsfäden zwischen den zusammengehörigen Chromosomen oder durch ein Eingreifen entsprechend angeordneter Spindelfasern, ist vorläufig nicht zu ermitteln.

Ueber den Cauchy'schen Integralsatz.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 7. Januar.)

Der Satz, dass ein über eine complexe Werthenreihe ausgedehntes Integral von der Form $\int_{z_0}^{z} f(z) \cdot dz$ unter gewissen Bedingungen von der Wahl der zwischen z_0 und z gelegenen Zwischenwerthe, dem „Integrationswege", unabhängig ist, oder, was im Wesentlichen dasselbe besagt, dass unter analogen Bedingungen das Integral $\int f(z) \cdot dz$, erstreckt über einen geschlossenen Integrationsweg, verschwindet, wird wohl ziemlich allgemein schlechthin als der Cauchy'sche Integralsatz bezeichnet und zwar wohl nicht lediglich darum, weil er von Cauchy zuerst ausgesprochen und bewiesen wurde[1]) (denn so verstanden gibt es eine ganze Anzahl Cauchy'scher Integralsätze), sondern weil er als die eigentliche Grundlage der modernen

[1]) Soviel mir bekannt ist, in dieser Form zum ersten Male in dem 1825 als besonderes Heft herausgegebenen „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires", § 3. — In Laurent's Traité d'Analyse (T. III, p. 257) und Kronecker's Vorlesungen über Integrale (p. 52) wird das Jahr 1814 als Publicationsjahr angegeben. Obschon dieser Bemerkung eine nähere Quellenangabe nicht beigefügt ist, so lässt sich doch mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass dieselbe auf das im Jahre 1814 der Pariser Akademie vorgelegten „Mémoire sur les intégrales définies" (Oeuvres complètes, T. I, p. 399—506) zurückzuführen sein dürfte. Sollte dies aber wirklich der Fall sein, so muss jene Angabe als

Functionentheorie im Cauchy-Riemann'schen Sinne ohne jeden Vorbehalt eine der bewunderungswürdigsten und frucht-

---

unrichtig oder vielmehr als nur theilweise richtig bezeichnet werden. In der eben erwähnten Abhandlung finden sich nämlich in Bezug auf den fraglichen Gegenstand nur die folgenden Gleichungen (mit unerheblichen, zum Zwecke leichteren Verständnisses hier vorgenommenen Aenderungen der dort angewandten Bezeichnung):

$$\int_0^x S(\xi, y) \cdot d\xi - \int_0^x S(\xi, 0) \cdot d\xi = \int_0^y U(x, \eta) \cdot d\eta - \int_0^y U(0, \eta) \cdot d\eta$$

wo S, U Funktionen von ξ, η bezeichnen, welche der Differentialgleichung $\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ genügen (a. a. O. p. 334, Gl. 4), und ferner:

$$\int_0^x f(\xi + y i) \cdot d\xi - \int_0^x f(\xi) \cdot d\xi = i \int_0^y f(x + \eta i) \cdot d\eta - i \int_0^y f(\eta i) \cdot d\eta$$

(p. 340, Fussnote, Gl. B). Diese Gleichungen enthalten allerdings den betreffenden Satz, aber nur für den speciellen Fall eines Rechtecks als Integrationsweg. Die wesentliche Bedeutung des Cauchy'schen Satzes für die Functionentheorie liegt aber gerade in seiner Anwendbarkeit auf einen beliebigen Integrationsweg. Und wenn es auch keine besondere Schwierigkeit hat, aus der Gültigkeit des Satzes für ein Rechteck durch einen geeigneten Grenzübergang jene allgemeinere Form abzuleiten (wie dies z. B. auch in dem hier weiter unten abzuleitenden Beweise geschieht: cf. § 4), so kann doch von einer derartigen Verallgemeinerung überhaupt erst dann die Rede sein, wenn der Begriff eines Integrals von der Form $\int (S \cdot dx + U \cdot dy)$ oder $\int f(z) \cdot dz$, genommen über einen beliebigen Integrationsweg, wirklich definirt ist. Eine solche Definition findet sich aber wohl zum ersten Male in der genannten Abhandlung von 1825 (§ 2 und § 9), wenigstens ist in dem „Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal" vom Jahre 1823 hiervon noch keine Rede, und Cauchy bemerkt auch in der Einleitung zu jener Abhandlung ganz ausdrücklich, dass keine einzige aller bisher erschienenen Arbeiten „den Grad von Allgemeinheit genügend fixirt habe, dessen ein solches Integral fähig ist". Durch die Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Gauss und Bessel (1880) ist die merkwürdige Thatsache bekannt geworden, dass Gauss den fraglichen Satz in seiner allgemeinen Fassung schon im Jahre 1811 kannte. (Brief an Bessel vom 18. December 1811.) Er ist indessen niemals

barsten Entdeckungen des grossen Mathematikers genannt werden darf.

Cauchy bewies den fraglichen Satz mit Hülfe von Continuitätsbetrachtungen: er zeigte, dass bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Integrationscurve mit Festhaltung der Endpunkte das obige Integral nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung geändert wird, oder anders ausgesprochen,[1]) dass die Variation des Integrals den Werth Null hat. Die Beweise, die sich in der Mehrzahl französischer Lehrbücher für jenen Satz finden, sind im Wesentlichen einfache Reproductionen oder Modificationen dieses Cauchy'schen Beweises. Meiner Ansicht nach haftet allen diesen Beweisen, nach dem Maassstabe moderner analytischer Anschauungen gemessen, ein mehr oder weniger erhebliches Manco von überzeugender Strenge an. Entweder sie wenden die Principien der Variationsrechnung, deren strenge Begründung zu den schwierigsten Problemen der Infinitesimalrechnung gehört, mit einer Unbedenklichkeit an, die durch das Maass der gemachten Voraussetzungen kaum gerechtfertigt ist.[2]) Oder sie suchen mit Umgehung der Variations-

---

wieder darauf zurückgekommen, und es scheint, dass sich auch in seinem Nachlasse keinerlei Aufzeichnungen hierüber vorgefunden haben. Man wird daher wohl Kronecker nur Recht geben können, wenn er hieran anknüpfend a. a. O. folgendes bemerkt: „Es ist doch ein grosser Unterschied, ob Jemand eine mathematische Wahrheit mit vollem Beweise und der Darlegung ihrer ganzen Tragweite veröffentlicht oder ob ein Anderer sie nur so nebenher einem Freunde unter Discretion mittheilt. Desshalb können wir den Satz mit Recht als das Cauchy'sche Theorem bezeichnen."

[1]) a. a. O. p. 6: „Ainsi la démonstration du principe ci-dessus énoncé repose sur cette seule observation, que la variation de l'intégrale est nulle."

[2]) Man sehe z. B. Briot et Bouquet, Fonctions doublement périodiques (1859) p. 20. — Bertrand, Calcul intégral (1870) p. 295. — Laurent, Fonctions elliptiques (1880) p. 6; desgl. Traité d'Analyse (1888) T. III, p. 210. — Picard, Traité d'Analyse (1891/93) T. I, p. 77; T. II, p. 4.

rechnung deren Princip durch eine directe Infinitesimalbetrachtung zu ersetzen, imputiren aber dabei der Function $f(z)$ eine für alle diese Beweise unentbehrliche Eigenschaft ziemlich complicirter Natur, welche entweder ganz direct in die Voraussetzung aufgenommen oder zuvor auf Eigenschaften einfacherer Art zurückgeführt werden müsste. Es ist dies die Annahme, dass der Differenzenquotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z gleichmässig nach $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich eine positive Grösse ϱ angeben lässt, sodass:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon \quad \text{wenn nur:} \ |h|<\varrho$$

für alle in Betracht kommenden Werthe von z.[1]) Nimmt man diese Eigenschaft ohne weiteres in die Voraussetzung des Satzes auf, so verliert derselbe vollständig seinen einfachen und elementaren Charakter. Man müsste also vor

---

[1]) Ohne diese Annahme fällt z. B. der überhaupt wenig streng gehaltene Beweis bei Camille Jordan, Cours d'Analyse, T. II (1888) p. 275; aber auch der sorgfältiger durchgeführte Beweis von Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques (1875), p. 128—132, und ein mit dem eben genannten nahe verwandter von Mittag-Leffler: Göttinger Nachrichten 1875, p. 65—73. (Ein in dem letztgenannten Aufsatze angeführter, angeblich vollkommen strenger Beweis von Malmsten war mir leider bisher nicht zugänglich, da er nur in schwedischer Sprache erschienen ist (1865)).

Der gleiche Vorwurf trifft auch den anscheinend sehr einfachen Beweis, den Herr Goursat im 4. Bande der Acta mathematica (1884) veröffentlicht hat. Uebrigens wird die scheinbare Kürze dieses Beweises auch noch dadurch ziemlich illusorisch, dass die von vornherein als erwiesen angenommene Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes für $\int dz$, $\int z\,dz$ in Wahrheit eine Grenzbetrachtung erfordert, die nicht wesentlich einfacher ausfällt, als die in § 2 dieses Aufsatzes allgemeiner durchgeführte.

Allem versuchen, dieselbe etwa aus der vorauszusetzenden Stetigkeit[1]) von $f'(z)$ abzuleiten, ein Unternehmen, das, wenn überhaupt durchführbar, zweifellos auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führt, da es sich bei dem obigen Differenzenquotienten in Wahrheit um eine Function von 4 Veränderlichen (nämlich: $z = x + yi$, $h = \xi + \eta i$) handelt.

Eine völlig andere Methode schlug bekanntlich Riemann beim Beweise des in Rede stehenden Satzes ein, indem er denselben auf einen Specialfall des Green'schen Satzes gründete, nämlich auf die Reduction eines über ein gewisses Ebenenstück zu erstreckenden Doppelintegrals von der Form $\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \cdot dy$ auf ein einfaches Integral $\int(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ erstreckt über die Begrenzung.[2]) Dieser Beweis ist ziemlich unverändert in fast alle einschlägigen deutschen Lehrbücher,[3]) aber auch in viele ausländische[4]) übergegangen und wird ganz allgemein ausdrücklich als der „Riemann'sche" Beweis des Cauchy'schen Satzes bezeichnet: wie mir scheint, mit einigem Unrecht. Denn wenn auch

---

1) Bei der grossen Mehrzahl der angeführten Beweise wird sogar nur die Endlichkeit, nicht die Stetigkeit von $f'(z)$ vorausgesetzt, wodurch deren Grundlagen noch problematischer werden.

2) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen etc. (Inauguraldissertation, 1851).

3) Man vgl. z. B. die Lehrbücher über Functionentheorie oder elliptische bezw. Abel'sche Functionen von Durège, Thomae, Königsberger, Neumann, sowie die Compendien der Analysis von Schlömilch, Lipschitz, Harnack.

4) Man sehe z. B. Houël, Théorie élémentaire des quantités complexes; desgl. Calcul infinitésimal, T. III. — Hermite, Cours d'Analyse (réd. par Andoyer). — Casorati, Teorica delle funzione. — Auch mehrere der schon oben genannten Compendien (Bertrand, Laurent), welche den Beweis neben dem Cauchy'schen ausdrücklich als den Riemann'schen anführen.

derselbe erst durch Riemann's Darstellung allgemeine Verbreitung gefunden hat, so lässt sich doch mit unbestreitbarer Sicherheit nachweisen, dass Cauchy bereits fünf Jahre vor dem Erscheinen der Riemann'schen Dissertation ihn nicht nur gekannt, sondern in der Hauptsache auch publicirt hat. Da ich nach dem Gesagten wohl annehmen darf, dass diese Thatsache bisher völlig unbemerkt geblieben ist, so möchte ich an dieser Stelle folgendes darüber mittheilen:

Im 23. Bande der Comptes Rendus findet sich auf S. 251 eine Note von Cauchy mit dem Titel: „Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée." In dieser Note wird zunächst das Integral $(S) = \int k \cdot ds$ erstreckt über die Begrenzung einer Fläche S bei beliebiger Anzahl von Variablen bezw. Dimensionen definirt, alsdann aber heisst es wörtlich folgendermassen (S. 254):

„Lorsque, la surface S étant plane, x, y se réduisent à deux coordonnées rectilignes, ou polaires, ou de toute autre nature, propre à déterminer la position d'un point dans le plan de la surface S, alors, en désignant par X, Y deux fonctions continues des variables x, y et supposant

$$k = X \cdot D_s x + Y \cdot D_s y$$

on a

$$(S) = \pm \int\int (D_y X - D_x Y)\, dx\, dy$$

l'intégrale double s'étendant à tous les points de la surface S."

Nun folgt eine Bemerkung über die Bestimmung des zweifelhaften Vorzeichens, worauf Cauchy folgendermassen fortfährt:

„Dans le cas particulier où la somme

$$X\,dx + Y\,dy$$

est une différentielle exacte, on a

$$D_y X = D_x Y$$

et la formule qui détermine la valeur de (S) se réduit à l'équation déjà trouvée

$$(S) = 0.\text{“}$$

Das ist aber in der That ganz genau der fragliche „Riemann'sche“ Beweis mit dem einzigen Unterschiede, dass die Rechnung, welche zur Reduction des doppelten Integrals auf das einfache dient, an dieser Stelle nicht mitgetheilt wird.[1]) Cauchy setzt eben diese Reductionsformel einfach als bekannt voraus, und das war sie ja auch damals schon seit längerer Zeit.[2]) Wirklich neu ist nur ihre äusserst sinnreiche Anwendung auf den vorliegenden Fall, deren Priorität man bisher fälschlich Riemann zugeschrieben hat. Riemann selbst hat wohl niemals jenen Beweis als sein specielles Eigenthum in Anspruch genommen, und es erscheint auch relativ bedeutungslos, darüber Vermuthungen anstellen zu wollen, ob er die citirte Note gekannt haben möge oder nicht. Hingegen halte ich es für nicht unwichtig, an dieser Stelle einmal die Frage aufzuwerfen, ob denn

---

[1]) Im Eingange der betreffenden Note theilt Cauchy der Akademie mit, dass er sich an dieser Stelle auf einen kurzen Auszug beschränke, da er die eigentliche Abhandlung demnächst in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique publiciren wolle. Dies ist indessen aus mir unbekannten Gründen unterblieben, und, soviel ich feststellen konnte, ist die angekündigte Abhandlung auch an keiner anderen Stelle gedruckt worden. Hierüber bezw. ob sich dieselbe vielleicht in Cauchy's Nachlasse vorgefunden hat, werden vielleicht die noch im Erscheinen begriffenen Oeuvres complètes Aufklärung bringen.

[2]) Die Abhandlung von Green: „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism“, auf welche man ja bekanntlich die fragliche Formel zurückzuführen pflegt, ist schon im Jahre 1828 erschienen.

zwischen den Arbeiten Cauchy's und Riemann's berühmter Dissertation überhaupt kein nachweisbarer Zusammenhang besteht? Es muss doch sicherlich sehr merkwürdig erscheinen, dass der Name Cauchy's in jener Schrift mit keiner Silbe erwähnt wird, wenn man bedenkt, dass zu jener Zeit nicht nur Cauchy nächst Gauss wohl unbestritten als der bedeutendste unter den lebenden Mathematikern galt, sondern dass auch gerade er von seinem ersten Auftreten an einen grossen Theil seiner gesammten literarischen Production ganz speciell der consequenten Einführung der complexen Grössen in die Analysis gewidmet und auf diesem Gebiete damals eine ganze Reihe von Resultaten bereits publicirt hatte, die für die Entwickelung der Functionentheorie in der von Riemann verfolgten Richtung als fundamental anzusehen sind; ich nenne ausser dem hier in Rede stehenden Satze nur die Einführung des Begriffes der monogenen d. h. mit einem von der Differentiationsrichtung unabhängigen Differentialquotienten versehenen Function,[1]) ihre Entwickelbarkeit in Potenzreihen,[2]) die Definition der Periodicitätsmoduln („indices de périodicité") eines Integrals und die hieraus resultirende Periodicität der Umkehrungsfunctionen.[3]) Obschon die Priorität Cauchy's in diesen und einer Reihe daran anknüpfender Fragen wohl niemals ernstlich bestritten worden ist, so erschien es mir

[1]) Nouv. Exerc. T. IV p. 346 (1847). Hier findet sich wohl zum ersten Male der Ausdruck „monogen" und dessen Definition durch die Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

[2]) Zuerst in einem 1832 zu Turin herausgegebenen lithographirten Mémoire (wieder abgedruckt 1841 im 2. Bande der Nouv. Exerc. p. 50). In anderer Form: Nouv. Exerc. T. I p. 269 (1840).

[3]) C. R., T. 23 p. 689 (1846). Diese Abhandlung enthält thatsächlich die vollständige Grundlage für die moderne Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen.

dennoch angemessen, bei dieser Gelegenheit einmal ausdrücklich hierauf hinzuweisen, da sich neuerdings eine gewisse Tendenz bemerkbar gemacht hat, die mit Recht ausserordentlich hohe Schätzung der Verdienste Riemann's um die Entwickelung der Functionentheorie bis zur Ueberschätzung auf Kosten nicht minder verdienstvoller Mathematiker auszudehnen.

Lässt sich nun auch gegen die Stichhaltigkeit des zuletzt besprochenen Beweises keine Einwendung machen (falls man noch die Stetigkeit oder wenigstens Integrabilität von $\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ in die Voraussetzung aufnimmt), so scheint mir derselbe in Bezug auf Einfachheit und Natürlichkeit der Methode noch keineswegs denjenigen Anforderungen zu genügen, welche man an den Beweis eines so grundlegenden, gleichsam im Anfange einer ausgedehnten Disciplin stehenden Satzes stellen möchte. Die Herbeiziehung des Doppelintegrals wird, rein methodisch betrachtet, immer als ein nicht hinlänglich zu motivirender Umweg erscheinen und wirkt erfahrungsgemäss bei der Einführung in das Studium der Functionentheorie für den Anfänger äusserst erschwerend.[1])

Ich habe daher versucht, einen neuen und, wie ich glaube, sowohl hinlänglich einfachen, als strengen Beweis abzuleiten,[2]) dessen Mittheilung den Hauptzweck des vorliegenden Aufsatzes bildet. Ich benütze diese Gelegenheit,

---

[1]) Die Schwierigkeit, welche die Ableitung der Green'schen Reductionsformel dem Anfänger zu bereiten pflegt, hat Kronecker (cf. Berliner Sitzungsberichte von 1885 p. 785 und Vorlesungen über Integrale p. 37—41) dadurch zu vermindern gesucht, dass er die fragliche Formel zunächst für ein Dreieck oder ein Rechteck beweist und sodann das allgemeine Resultat mit Hülfe eines Grenzüberganges daraus zusammensetzt.

[2]) Derselbe berührt sich in mancher Beziehung mit den Betrachtungen, welche Herr Thomae über die Integration zweigliedriger Differentialien angestellt hat (s. Einleitung in die

um etwas genauer auf die Definition eines Integrals der Form $\int P \cdot dx + Q \cdot dy$, erstreckt über eine Curve, einzugehen und dabei gewisse Punkte zur Sprache zu bringen, die vielleicht vielfach bekannt, aber meines Wissens noch niemals scharf präcisirt worden sind.

Schliesslich will ich nur noch bemerken, dass die im Folgenden benützten Methoden auch eine Verallgemeinerung für die Betrachtung ein- und mehrfacher Integrale mit mehr als zwei Variablen gestatten, worauf ich vielleicht bei späterer Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

§ 1. Definition und allgemeine Eigenschaften eines Curven-Integrals.

Es sei:

$$\eta = \varphi(\xi) \tag{1}$$

für das Intervall $x_0 \leq \xi \leq x$ eine eindeutige und stetige Function von ξ und zwar insbesondere:

$$\varphi(x_0) = y_0 \qquad \varphi(x) = y,$$

ferner $P(\xi, \eta)$ eine gleichfalls eindeutige und stetige Function von (ξ, η) für alle Werthe ξ des genannten Intervalles und die durch Gl. (1) zugeordneten Werthe von η. Alsdann hat das bestimmte Integral:

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\xi$$

einen festen endlichen Werth und soll bezeichnet werden als das Integral von $P(\xi, \eta) \cdot d\xi$, genommen über den Integrationsweg C in der Richtung $x_0 \ldots x$, in Zeichen:

Theorie der bestimmten Integrale p. 36 ff.). Doch wird daselbst von einer Definition des unbestimmten Integrals von $(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ ausgegangen, wodurch die ganze Beweisführung sehr wesentlich an Einfachheit und Durchsichtigkeit verliert.

$$\int_{(+C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\,\xi$$

wenn C diejenige Punktreihe bedeutet, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ bezogen auf irgend ein Coordinatensystem — etwa, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, ein gewöhnliches rechtwinkeliges — entspricht, während die Bezeichnung $(+C)$ andeuten soll, dass diese Punktreihe bei der Integration in der Richtung der wachsenden x durchlaufen werden soll. Wir pflegen diese Punktreihe schlechthin als Integrations-Curve und das betreffende Integral als ein Curven-Integral zu bezeichnen, obschon hierbei keineswegs stets an eine „eigentliche" Curve d. h. eine im allgemeinen mit einer bestimmten Tangente versehene stetige Linie zu denken ist: denn thatsächlich genügt für die Existenz des obigen Integrals die blosse Stetigkeit von $\varphi(\xi)$, ohne dass man genöthigt wäre, über das Vorhandensein eines im Allgemeinen bestimmten, endlichen Differentialquotienten irgendwelche Voraussetzung zu machen.[1])

Bezeichnet man mit $(-C)$ die nämliche Curve, falls die Integration in der entgegengesetzten Richtung vorge-

---

[1]) Gerade aus diesem Grunde gebe ich dem hier eingeschlagenen Wege den Vorzug vor dem fast allgemein üblichen, wobei das Integral zunächst als Grenzwerth einer Summe definirt und sodann dessen Existenz mit Hülfe einer Parameterdarstellung von der Form:

$$\xi = \varphi(t) \qquad \eta = \psi(t)$$

nachgewiesen wird. Bei diesem Verfahren ist die Voraussetzung eines integrablen Differentialquotienten $\varphi'(t)$ und ebenso für das sogleich noch einzuführende Integral $\int_{(C)} Q(\xi, \eta) \cdot d\,\eta$ die analoge Voraussetzung bezüglich $\psi'(t)$ unerlässlich, was mir aus dem Grunde wenig wünschenswerth erscheint, weil hierdurch die Vorstellung von dem Zustandekommen eines solchen Integrals nicht nur eine zu eng begrenzte, sondern in gewissem Sinne geradezu eine principiell unrichtige wird, wie später noch des näheren erörtert werden soll.

nommen wird, so folgt ohne Weiteres aus der obigen Definition, dass:

$$\text{(3)} \qquad \int_{(-C)} P(\xi, \eta) \cdot d = -\int_{(+C)} P(\xi, \eta)\, d\,\xi$$

und ferner, wenn man die Curve C in eine beliebige Anzahl, in dem gleichen Sinne wie C zu durchlaufender Theilcurven c_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegt denkt:

$$\text{(4)} \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \sum_1^n{}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi.$$

Schliesslich erkennt man auch, dass das Integral (2) einer ganz analogen Mittelwerthrelation genügt, wie die gewöhnlichen bestimmten Integrale einer Veränderlichen, nämlich:

$$\text{(5)} \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = P(\xi', \eta') \cdot (x - x_0)$$

wo (ξ', η') ein passendes Werthepaar aus dem Gebiete:

$$x_0 \leq \xi \leq x \qquad \eta = \varphi(\xi),$$

also einen gewissen Punkt der Curve C bedeutet. Diese Beziehung lehrt insbesondere, dass der Integralwerth gleichzeitig mit $(x - x_0)$ gegen Null convergirt (d. h. zunächst immer unter der Voraussetzung, dass $\eta = \varphi(\xi)$ eine eindeutige Function).

Hat die Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ die specielle Form $\eta = y_0$, wo y_0 eine Constante bedeutet, d. h. reducirt sich die Curve C auf eine zur X-Axe parallele Gerade, so folgt ohne Weiteres aus der Definition, dass:

$$\text{(6)} \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\,\xi$$

wird. Dagegen ist der Fall, dass C sich auf eine Parallele zur Y-Axe reducirt, in der oben gegebenen Definition nicht enthalten. Denkt man sich jedoch als Integrationscurve C

zunächst eine beliebige andere Gerade $\overline{x_0 x}$, so lehrt der Mittelwerthsatz (5), dass der betreffende Integralwerth beliebig klein wird, sobald die Neigung der Geraden gegen die Y-Axe der Null zustrebt, und man wird daher der bisher gegebenen Definition noch die Gleichung:

$$(7) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = 0$$

als consequente Erweiterung hinzuzufügen haben, für den Fall, dass die Curve C in die fragliche Verticale übergeht.

Die Gl. (4) kann sodann dazu dienen, um den vorliegenden Integralbegriff auf solche Fälle auszudehnen, in denen $\eta = \varphi(\xi)$ eine mehrdeutige stetige Function von ξ darstellt, sofern dieselbe nur der Beschränkung unterworfen wird, dass sich das Intervall $(x_0\, x)$ in eine endliche Anzahl theilweise oder gänzlich sich überdeckender Intervalle $(x_0 x_1) \cdots (x_{\lambda-1}\, x_\lambda) \cdots (x_{n-1}\, x_n)$[1]) umformen lässt, für welche dann die Gl. $\eta = \varphi(\xi)$ ersetzt werden kann durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$(8\text{a}) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \eta = \varphi_1(\xi) & \text{für:} & x_0 \lesssim \xi \lesssim x_1 \\ \cdots & & \cdots \\ \eta = \varphi_\lambda(\xi) & & x_{\lambda-1} \lesssim \xi \lesssim x_\lambda \\ \cdots & & \cdots \\ \eta = \varphi_n(\xi) & & x_{n-1} \lesssim \xi \lesssim x, \end{array} \right.$$

wo jetzt $\varphi_1(\xi)$ durchweg eindeutige Functionen bedeuten. Hierbei ist noch zulässig, dass für eine endliche Anzahl von Werthen x_μ die Variable η in der Weise unendlich vieldeutig wird, dass sie bei constantem $\xi = x_\mu$ eine continuirliche Werthenreihe $y_\mu \cdots y'_\mu$ durchläuft (geometrisch gesprochen, dass einzelne Stücke der Integrationscurve C aus

1) Dabei kann also insbesondere $x_{\lambda-1}$ beliebig oft mit x_0, desgl. x_λ mit x zusammenfallen.

aus verticalen Geraden bestehen), sodass also zu den Gleichungen (8a) noch eine endliche Anzahl von Beziehungen der Form:

$$(8\text{b}) \qquad y_\mu < \eta \leq y'_\mu \qquad \text{für:}\ \xi = x_\mu$$

hinzutreten würde.

Eine Function $\eta = \varphi(\xi)$, welche den ebengenannten Bedingungen genügt, soll in Zukunft nach bekannten Analogien als abtheilungsweise eindeutig bezeichnet werden.

Bedeutet dann wiederum C diejenige Curve, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ zugehört, c_ν diejenigen Theilcurven, welche den Beziehungen (8a) und (8b) entsprechen, so soll die Definitionsgleichung gelten:

$$(9) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n{}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi$$

sofern als Integrationsrichtung für die einzelnen Curven c_ν diejenige festgehalten wird, welche sich bei stetiger Durchlaufung der Gesammtcurve C in dem einmal vorgeschriebenen Sinne ergibt.

Die Gl. (9) kann ferner auch zur Definition des fraglichen Integrals dienen, falls die bisher auf (C) als durchweg stetig angenommene Function $P(\xi, \eta)$ in $x_1, x_2, \cdots x_n$ endliche Unstetigkeiten besitzt, und es hat keine Schwierigkeit diese Definition, nach genau denselben Principien, wie für Integrale der Form $\int_{x_0}^{x} f(\xi) \cdot d\xi$, auf den Fall auszudehnen, dass jene Stellen $x_1, x_2, \cdots$ gewisse unendliche (sog. unausgedehnte) Punktmengen bilden: hierauf soll indessen nicht näher eingegangen werden, da eine derartige Betrachtung mir keinerlei besonderes Interesse zu bieten scheint.[1])

[1]) Auch übergehe ich hier den Fall, dass $P(\xi, \eta)$ an einzelnen Stellen unendlich gross wird, und verweise in dieser Hinsicht auf die allgemein übliche Behandlungsweise.

Es bedeute nun ferner $\xi = \psi(\eta)$ eine für das Intervall $y_0 \leq \eta \leq y$ stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Function von η, $Q(\xi, \eta)$ eine für die eben genannten Werthe (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Function von (ξ, η), so ist aus dem zuvor gesagten vollständig klar, was unter einem Integral von der Form:

$$\int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta$$

zu verstehen ist, falls C' die der Gl. $\xi = \psi(\eta)$ zugehörige Curve bedeutet, und man erkennt ohne Weiteres, dass dieses Integral ganz analogen Gesetzen gehorcht, wie das unmittelbar zuvor betrachtete. Insbesondere wird:

$$(10) \qquad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta$$

$$\text{bezw.} \quad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = 0,$$

falls sich die Integrationscurve C' auf die zur Y-Axe parallele Gerade $\xi = x_0$, bezw. auf irgend eine Parallele zur X-Axe reducirt.

Man habe nun schliesslich gleichzeitig:

$$(11) \qquad \begin{cases} \eta = \varphi(\xi) & \text{für: } x_0 < \xi < x \\ \xi = \psi(\eta) & \text{für: } y_0 < \eta < y \end{cases}$$

(sodass also ψ die inverse Function von φ — vice versa), wo $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ in dem bezeichneten Umfange durchweg stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Functionen ihrer Argumente bedeuten. Ferner seien $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ zwei für sämmtliche durch die Bedingungen (11) definirten Werthepaare (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Functionen von (ξ, η). Alsdann definiren wir:

$$(12)\quad \int_{(C)} (P(\xi,\eta)\cdot d\,\xi + Q(\xi,\eta)\cdot d\,\eta) = \int_{(C)} P(\xi,\eta)\cdot d\,\xi + \int_{(C)} Q(\xi,\eta)\cdot d\,\eta,$$

falls C die durch jede der beiden Gleichungen (11) dargestellte, jedesmal in demselben Richtungssinne zu nehmende Curve bedeutet. Dabei lässt sich die auf die Stetigkeit und Eindeutigkeit der beiden Functionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\eta)$ bezügliche Voraussetzung leicht so umformen, dass schliesslich nur von irgend einer dieser beiden Functionen darin die Rede ist. Damit nämlich die im Intervalle $x_{\nu-1} \leqq \xi < x_\nu$ eindeutige und stetige Function $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ eine im Intervalle $y_{\nu-1} = \varphi(x_{\nu-1})$ bis $y_\nu = \varphi(x_\nu)$ eindeutige und stetige Umkehrung $\xi = \psi_\nu(\xi)$ besitze, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ mit wachsenden Werthen von ξ monoton zu- oder abnehme — vice versa. Hiernach lässt sich aber die oben ausgesprochene Bedingung einfacher folgendermassen formuliren: Es muss eine der beiden Functionen $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ stetig, endlich-vieldeutig und abtheilungsweise monoton sein — wobei nach dem früher Gesagten η oder ξ für eine endliche Anzahl endlicher Intervalle auch constant sein darf.

Wenn in Zukunft von einem „beliebigen" Integrationswege die Rede ist, so soll immer ein solcher darunter verstanden werden, welcher die eben näher bezeichneten Eigenschaften besitzt. Dabei sei aber auch hier wieder ganz ausdrücklich hervorgehoben, dass die obigen Bedingungen wiederum noch keinerlei Voraussetzung bezüglich der Existenz von $\varphi'(\xi)$ bezw. $\psi'(\eta)$ involviren. Denn es gibt thatsächlich stetige und beständig monoton zu- oder abnehmende Functionen (also auch ohne sog. Invariabilitätszüge), die nichtsdestoweniger für unendlich viele Stellen jedes Intervalles (z. B. alle rationalen) entweder unendlich grosse oder überhaupt keine bestimmten Differentialquotienten be-

sitzen.[1]) Mir scheint dies insofern von Interesse, als von der Existenz eines zum Mindesten integrablen Differentialquotienten $\varphi'(\xi)$, oder genauer gesagt von der Integrabilität des Ausdruckes $\sqrt{1+\varphi'^2(\xi)}\cdot d\xi$, die Existenz einer bestimmten Bogenlänge der Curve in dem gewöhnlich acceptirten Sinne[2]) abhängt, und sich hiernach die, wie ich glaube, ziemlich vielfach verbreitete, auf der üblichen Parameterdarstellung der Integrationscurve beruhende Annahme als irrig erweist, dass die Existenz eines bestimmten Werthes für ein Curvenintegral wesentlich mit derjenigen einer bestimmten Bogenlänge (Rectificirbarkeit) der Integrationscurve zusammenhänge. Wie die hier angestellte Betrachtung zeigt, ist die Existenz einer bestimmten Bogenlänge für das Integral völlig belanglos. Weiterhin wird sich aber auch noch ergeben, dass in Fällen, wo eine solche Bogenlänge existirt, ihr Werth auf denjenigen des Integrals $\int_{(C)} P\cdot d\xi + Q\cdot d\eta$ überhaupt keinen merklichen Einfluss ausübt, genauer gesagt, dass Curven mit angebbarer, endlicher Längedifferenz Integrale liefern können, deren Werthe einander beliebig nahe kommen (NB. ohne dass über $P(\xi,\eta)$, $Q(\xi,\eta)$ irgendwelche weitere Voraussetzung gemacht wird).

---

[1]) s. z. B. Cantor, Condensation der Singularitäten. Math. Ann. Bd. 19, p. 591. Ferner: Dini, Theorie der Functionen etc., übers. von Lüroth-Schepp, § 112*. Ein anderer Typus von derartigen Functionen: ebendaselbst § 132.

2) cf. Du Bois-Reymond, Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Var.-Rechnung. Math. Ann. Bd. 15, p. 285. Bekanntlich hat Scheeffer (Acta math. Bd. 5, p. 50) für den Fall der Nichtexistenz von $\int_{x_0}^{x} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ eine erweiterte Definition der Bogenlänge gegeben. Doch lassen sich dagegen Einwendungen erheben (cf. Du Bois-Reymond, Acta math. Bd. 6, p. 167), welche bisher nicht widerlegt worden sind.

§ 2. Angenäherte Darstellung eines beliebigen Curvenintegrals durch ein sogenanntes Treppenintegral.

Eine gebrochene, beliebig auf- und absteigende Linie, deren Stücke den Coordinatenaxen wechselsweise parallel laufen, soll im Folgenden schlechthin als eine Treppe und, falls der Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, als eine geschlossene Treppe oder als ein Treppenpolygon bezeichnet werden. Ein Integral, dessen Integrationsweg eine solche Treppe ist, soll dann kurz ein Treppenintegral heissen.

Es sei nun S diejenige Treppe, welche durch die Eckpunkte:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_0),\ (x_1, y_1), \cdots (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (x_n, y_{n-1}),\ (x_n, y_n)$$

bestimmt wird, so hat man mit Benützung der Gleichungen (6), (7), (10) offenbar:

$$(13)\quad \begin{cases} \int\limits_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \sum\limits_1^n{}_\nu \int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\,\xi \\ \int\limits_{(S)} Q(\xi, \eta) \cdot d\,\eta = \sum\limits_1^n{}_\nu \int\limits_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x_\nu, \eta) \cdot d\,\eta. \end{cases}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass sich jedes Curvenintegral mit beliebig vorzuschreibender Annäherung durch ein solches Treppenintegral ersetzen lässt, sobald sich die Stetigkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ noch auf eine gewisse Nachbarschaft der Integrationscurve erstreckt.

Ich nehme als Integrationscurve C zunächst eine von x_0 bis x monoton verlaufende, etwa, um die Anschauung zu fixiren, beständig aufsteigende Curve. Ferner sei $P(\xi, \eta)$ eine eindeutige und stetige Function von (ξ, η) nicht nur auf der Curve C, sondern noch für ein gewisses benachbartes Gebiet zum Mindesten auf einer Seite der

Curve z. B. der rechten: dieses Gebiet mag bei x_0 bezw. x durch ein gerades Linienstück parallel zur X- bezw. Y-Axe, im Uebrigen seitlich durch eine beliebige Curve begrenzt sein, und zwar sollen diese Grenzen mit zum Stetigkeitsbereiche von $P(\xi, \eta)$ gehören. Alsdann ist nach einem bekannten Satze $P(\xi, \eta)$ für das definirte Gebiet gleichmässig stetig, d. h. nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse σ lässt sich eine positive Grösse δ so bestimmen, dass:

$$(14) \quad |P(\xi', \eta') - P(\xi, \eta)| < \sigma \quad \text{für:} \left\{ \begin{matrix} |\xi' - \xi| \\ |\eta' - \eta| \end{matrix} \right\} < \delta,$$

sofern (ξ, η), (ξ', η') dem fraglichen Gebiete einschliesslich seiner Grenzen angehören.

Man theile nun das Intervall $(x_0\, x)$ durch Einschaltung der Theilpunkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(m-1)}$ in irgendwelche Theilintervalle, deren Länge durchweg $< \delta$ sein soll. Es seien ferner $y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots y^{(m-1)}$ die zugehörigen, auf der Y-Axe verzeichneten Curvenordinaten. Sind dann unter den Intervallen $(y^{(k-1)}\, y_k^{(k)})$ solche vorhanden, deren Länge $y^{(k)} - y^{(k-1)}$ $< \delta$, so kann man durch weitere Theilung erzielen, dass schliesslich nur Intervalle $< \delta$ vorhanden sind. Die auf diese Weise zum Vorschein kommenden y-Werthe (d. h. die früheren $y^{(k)}$ und die etwa noch eingeschalteten) mögen, der Grösse nach geordnet, bezeichnet werden mit:

$$y_1, \; y_2, \cdots y_{n-1},$$

und die zugehörigen Curvenabscissen (unter denen also die ursprünglichen $x^{(k)}$ mit enthalten sind) seien:

$$x_1, \; x_2 \cdots x_{n-1}.$$

Alsdann denke man sich diejenige Treppe construirt, welche durch die Punkte:

$$(x_0, y_0), \; (x_1, y_0), \; (x_1, y_1), \cdots (x_{n-1}, y_{n-1}), \; (x, y_{n-1}), \; (x, y)$$

bestimmt wird, und bezeichne die Theilcurven, in welche C durch die Punkte (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, \cdots (n-1))$ zerlegt wird, alle in der Richtung der wachsenden ξ gerechnet, mit $c_1, c_2, \cdots c_n$.

Man hat nun:

$$\mathfrak{J}_C = \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n{}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi$$

$$= \sum_1^n{}_\nu P(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi_\nu \leqq x_\nu \qquad y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu \leqq y_\nu.$$

Andererseits ergibt sich:

$$\mathfrak{J}_S = \int_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n{}_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\xi$$

$$= \sum_1^n{}_\nu P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi^{(\nu)} \leqq x_\nu.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\mathfrak{J}_C - \mathfrak{J}_S = \sum_1^n{}_\nu \{P(\xi_\nu, \eta_\nu) - P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1})\} \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

und da offenbar:

$$| \xi_\nu - \xi^{(\nu)} | \leqq x_\nu - x_{\nu-1} < \delta$$
$$| \eta_\nu - y_{\nu-1} | \leqq y_\nu - y_{\nu-1} < \delta$$

so findet man schliesslich mit Berücksichtigung von Ungl. (14):

$$(15) \qquad \left| \int_{(C)} P \cdot d\xi - \int_{(S)} P \cdot d\xi \right| < \sigma \cdot (x - x_0).$$

Ganz analog ergibt sich:

$$(16) \qquad \left| \int_{(C)} Q \cdot d\eta - \int_{(S)} Q \cdot d\eta \right| < \sigma (y - y_0)$$

und aus der Zusammenfassung beider Resultate:

$$(17) \qquad \left| \int_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) \right| < \sigma [(x - x_0) + (y - y_0)].$$

Da aber jeder beliebige Integrationsweg in eine endliche Anzahl solcher Curven C zerlegt werden kann, so folgt schliesslich ganz allgemein die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes.[1])

Das vorstehende Resultat wurde zwar hier wesentlich desshalb abgeleitet, weil dasselbe gestattet, den eigentlichen Beweis des Cauchy'schen Satzes auf ein Rechteck zu beschränken. Dasselbe kann indessen auch dazu dienen, um die am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachte Be-

---

[1]) Der analytische Begriff des „Treppenintegrals" und die eben bewiesene Beziehung zwischen beliebigen Curvenintegralen und solchen Treppenintegralen ist natürlich völlig unabhängig von der hier lediglich der grösseren Anschaulichkeit halber und namentlich mit Rücksicht auf die übliche Darstellung einer complexen Variablen gewählten Auffassung von ξ und η als rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes. Ein Treppenintegral ist lediglich eine Summe von Quadraturen der Form $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y)\, d\xi$, $\int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x, \eta)\, d\eta$, wobei im ersten Integral $y = y_{\nu-1}$ bezw. $= y_\nu$, im zweiten $x = x_\nu$ bezw. $= x_{\nu-1}$ zu setzen ist. Und der obige Satz, von jeder geometrischen Vorstellung losgelöst, besagt, dass ein Integral der Form $\int_{x_0, y_0}^{x, y} P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta$, wo zwischen ξ und η eine Beziehung von den näher definirten Eigenschaften besteht, stets mit beliebiger Annäherung durch eine endliche Anzahl solcher Quadraturen ersetzt werden kann.

merkung in sehr einfacher und anschaulicher Weise zu erläutern.

Nimmt man nämlich als Integrationscurve C eine die Punkte x_0 und x verbindende Gerade, deren Länge also den Werth $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzt, so kann man nach dem eben Gesagten das betreffende Integral mit beliebiger Annäherung durch ein solches über eine Treppe ersetzen, welche offenbar die unveränderliche Länge $|x-x_0|+|y-y_0|$ besitzt, wie klein man auch die Abstände ihrer Eckpunkte wählen mag. Mit anderen Worten: Bei unbegrenzter Verkleinerung der Treppenstufen convergirt der Werth des Treppenintegrals genau gegen denjenigen des geradlinigen Integrals, obschon die beiden Integrationswege die unveränderliche Längendifferenz $|x-x_0|+|y-y_0|$ $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzen.

§ 3. Aufstellung einer nothwendigen Bedingung für die Unabhängigkeit des Integrals $\int_{x_0,y_0}^{x,y}(P\cdot d\xi+Q\cdot d\eta$ vom Integrationswege.

Es seien $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T eindeutige und im Allgemeinen stetige Functionen von (x,y). Alsdann gilt der Satz:

Soll das Integral $\int_{x_0,y_0}^{x,y}P\cdot d\xi+Q\cdot d\eta)$ erstreckt über eine beliebige innerhalb T verlaufende Curve einen lediglich von den Grenzen, aber nicht vom Integrationswege abhängigen, bestimmten Werth besitzen, so muss für jede Stelle (x',y') in deren Umgebung die oben genannten Functionen stetig sind, die Beziehung bestehen:

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = \frac{\partial Q}{\partial x'}.$$

Beweis. Soll das fragliche Integral vom Integrationswege unabhängig sein, so muss offenbar jedes über eine einfach geschlossene, innerhalb T verlaufende Linie erstreckte Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ verschwinden.

Sei nun (x', y') ein beliebiger Punkt innerhalb T von der Beschaffenheit, dass die vier genannten Functionen für eine gewisse Umgebung derselben stetig sind. Alsdann denke man sich parallel zu den Coordinatenaxen ein Rechteck R construirt, welches einschliesslich seiner Begrenzung (R) noch in die betreffende Umgebung des Punktes (x', y') hineinfällt und diesen selbst im Innern enthält. Bezeichnet man sodann irgend einen Eckpunkt (etwa den linken unteren) von R mit (x_0, y_0), dagegen mit (x, y) jeden beliebigen Punkt im Innern (einschliesslich des Punktes (x', y')) und mit r jedes durch die Punkte (x_0, y_0) (x, y) bestimmte, zu den Coordinatenaxen parallele Rechteck, so muss offenbar die Beziehung stattfinden:

$$\int_{(r)} \{P(\xi, \eta) \cdot d\xi + Q(\xi, \eta) \cdot d\eta\} = 0$$

d. h. man hat für alle Werthe (x, y) des genannten Gebietes:

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta + \int_{x}^{x_0} P(\xi, y) \cdot d\xi$$
$$+ \int_{y}^{y_0} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta = 0$$

oder anders geschrieben:

$$(18) \qquad W_1(x, y) = W_2(x, y)$$

wenn gesetzt wird:

$$(19) \quad W_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta$$

$$(20)\quad W_2(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y) \,.\, d\xi.$$

Aus Gl. (19) folgt sodann durch Differentiation nach y:

$$(21)\qquad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y)$$

und aus Gl. (20) mit Berücksichtigung von Gl. (18) durch Differentiation nach x:

$$(22)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y)$$

und hieraus durch weitere Differentiation:

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Da aber die Gleichungen (21)—(23) lehren, dass mit $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ auch $\frac{\partial W_1}{\partial x}$, $\frac{\partial W_1}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$ stetig sind, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$$

und man findet somit nach Gl. (23):

$$(24)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

für alle Werthe (x, y) im Innern des Rechteckes R, insbesondere also für $x = x'$, $y = y'$ — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

§ 4. Der Cauchy'sche Satz.

Hauptsatz. Sind $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T durchweg eindeutige, endliche und stetige Functionen von (x, y),[1]) welche der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{24}$$

so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die vollständige Begrenzung jedes innerhalb T liegenden zusammenhängenden Flächenstückes. Und es ist $\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ für alle innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietstheiles von T verlaufenden Integrationswege eine eindeutige und stetige Function $W(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y).$$

Beweis. Zunächst lässt sich zeigen, dass $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die Begrenzung eines vollständig innerhalb T liegenden Rechtecks R den Werth Null hat.

Es seien (x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_1, y_1), (x_0, y_1) die Eckpunkte von R, (x, y) irgend einer und jeder beliebige Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von R. Alsdann definire ich für dieses Gebiet R zwei Functionen $W_1(x, y)$,

---

1) Es sind somit die genannten Functionen gleichmässig stetig im Innern und auf der Begrenzung jedes innerhalb T liegenden Gebietes T', wobei man die Begrenzung von T' derjenigen von T beliebig nahe bringen kann.



$W_2(x, y)$ als diejenigen besonderen Werthe des Integrals $\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, welche sich ergeben, wenn man einmal auf den Schenkeln des rechten Winkels über (x, y_0), das andere Mal über (x_0, y) bis (x, y) integrirt, also:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & W_1(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, \eta_0) \cdot d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta \\ \text{(b)} & W_2(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y) \cdot d\xi. \end{array} \right.$$

Es sind hiernach $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ für das betreffende Gebiet eindeutig definirte, lediglich von (x, y) abhängende Functionen, und zwar hat man offenbar insbesondere:

$$(26) \qquad W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0) = 0.$$

Man erkennt ferner leicht, dass $W_1(x,y)$, $W_2(x,y)$ stetige Functionen der beiden Variablen (x, y) sind. Bezeichnet man mit h, k zwei beliebige (positive oder negative) Incremente von x, y (wobei die Stelle $(x + h,\ x + k)$ auch eventuell ausserhalb von R fallen kann, in welchem Falle h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass das durch die vier Eckpunkte: (x_0, y_0), $(x + h, y_0)$, $(x + h,\ y + k)$, $(x_0, y + k)$ definirte Rechteck noch innerhalb T liegt), so wird:

$$W_1(x + h,\ y + k) = \int\limits_{x_0}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int\limits_{y_0}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta$$

und daher:

$$\begin{aligned} W_1(x + h,\ y + k) - W_1(x, y) &= \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi \\ &+ \int\limits_{y}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta + \int\limits_{y_0}^{y} \{Q(x + h, \eta) - Q(x, \eta)\} \cdot d\eta \\ = h \cdot P(x + \vartheta \cdot h, y_0) &+ k \cdot Q(x + h, y + \vartheta' \cdot k) \\ &+ l \cdot \{Q(x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot l) - Q(x, y_0 + \vartheta'' \cdot l)\} \end{aligned}$$

wo: $\Delta = y - y_0$ und $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ in den Grenzen $0 \cdots 1$ liegen. Da die Stellen:

$$(x + \vartheta \cdot h, y_0),\ (x + h, y + \vartheta' \cdot k),\ (x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta),\\ (x, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta)$$

sämmtlich dem Gebiete T angehören, so können die beiden ersten Glieder der rechten Seite wegen der Endlichkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$, das dritte wegen der Stetigkeit von $Q(\xi, \eta)$ durch Wahl einer oberen Grenze für h und k beliebig klein gemacht werden, womit die Stetigkeit von $W_1(x, y)$ in dem behaupteten Umfange erwiesen ist. Ganz analog erkennt man aber auch die Stetigkeit von $W_2(x, y)$.

Ferner ergibt sich durch Differentiation von Gl. (25a) nach y und Gl. (25b) nach x unmittelbar:

$$\text{(27)} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y)$$

und sodann aus (25a) durch Differentiation nach x zunächst:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta.$$

In Folge der gleichmässigen Stetigkeit von $Q(x, \eta)$ als Function der beiden Veränderlichen (x, η) darf man im letzten Gliede die Reihenfolge der Differentiation und Integration vertauschen und erhält daher mit Berücksichtigung der nach Voraussetzung bestehenden Beziehung (24):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, \eta)}{\partial x} \cdot d\eta \\ &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x, \eta)}{\partial \eta} \cdot d\eta \\ &= P(x, y) - P(x, y_0)\end{aligned}$$

und somit:

$$(28a) \qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y).$$

Analog ergibt sich:

$$(28b) \qquad \frac{\partial W_2}{\partial y} = Q(x, y).$$

Die Gleichungen (27), (28) lehren also, dass für alle (x, y), welche dem Innern oder der Begrenzung von R angehören, die Beziehungen bestehen:

$$(29) \qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}$$

und es können daher die für das nämliche Werthegebiet als stetig erkannten Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ nach einem bekannten Satze höchstens um eine additive Constante verschieden sein, welche aber offenbar den Werth Null haben muss, da nach Gl. (26) $W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0)$ ist. Man findet somit schliesslich insbesondere:

$$(30) \qquad W_1(x_1, y_1) = W_2(x_1, y_1)$$

d. h. das Integral $\int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über je ein Paar anstossender Rechteckseiten hat den gleichen Werth, oder anders ausgesprochen: Das Integral, continuirlich erstreckt über die Begrenzung des Rechtecks, hat den Werth Null.

Angenommen nun, man habe ein innerhalb T liegendes, von einem oder mehreren Treppenpolygonen volltsändig begrenztes zusammenhängendes Flächenstück S, so lässt sich ein solches stets mit Hülfe einer endlichen Anzahl von Parallelen zu den Coordinatenaxen in eine endliche Anzahl von Rechtecken r_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegen, deren Begrenzung theils von den einzelnen Stücken der ursprünglichen

Treppenbegrenzung, theils von Stücken jener Hülfslinien gebildet wird, und zwar gehört jedes Stück der ursprünglichen Begrenzung nur einem einzigen (r_ν), dagegen jedes Stück einer Hülfslinie stets zwei benachbarten (r_ν) gleichzeitig an. Man hat nun zunächst:

$$\sum_1^n {}_\nu \int_{(r_\nu)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0 \tag{31}$$

da jedes einzelne dieser Rechtecksintegrale verschwindet. Führt man hierbei alle Integrationen in demselben Sinne aus, etwa dem sog. positiven, wo also die Fläche jedes einzelnen r_ν bei der Integration über den Umfang zur Linken bleibt, so wird offenbar über jedes Stück einer Hülfslinie genau zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung integrirt: es heben sich also die betreffenden Integralbestandtheile vollständig heraus, während nur die auf die Stücke der ursprünglichen Begrenzung (S) bezüglichen Integrale mit einer bestimmten, eindeutig vorgeschriebenen Integrationsrichtung zurückbleiben. Durch Addition dieser Theilintegrale geht dann Gl. (31) in die folgende über:

$$\int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0 \tag{32}$$

wobei offenbar die Integration in dem Falle, dass (S) aus mehreren Treppenpolygonen besteht, über das äussere Polygon in der schlechthin als positiv geltenden (d. h. in der Richtung der wachsenden Winkel fortschreitenden), über jedes innere Polygon in der entgegengesetzten Richtung auszuführen ist.

Hat man schliesslich ein dem Gebiete T angehöriges, von einer oder mehreren Randcurven vollständig begrenztes, zusammenhängendes Flächenstück T', so kann man diesen Randcurven zunächst nach § 2 eine entsprechende Anzahl von Treppenpolygonen mit der Gesammtbegrenzung (S) zuordnen, dergestalt, dass die Differenz:

$$\int\limits_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int\limits_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

beliebig klein wird. Und da das zweite Integral den Werth Null hat, das erste aber einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass auch:

$$(33) \qquad \int\limits_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0$$

sein muss.

Bedeutet sodann U irgend ein einfach zusammenhängendes in T liegendes Flächenstück, und sind (x_0, y_0), (x_1, y_1) zwei beliebige Punkte in U, so werden irgend zwei innerhalb U zwischen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verlaufende Curven C und C', die sich weder selbst noch gegenseitig schneiden, einen Flächentheil von U vollständig begrenzen, sodass also das betreffende Integral über diese Begrenzung verschwindet. Man erhält somit, wenn man als Integrationsrichtung auf C und C' die von (x_0, y_0) nach (x, y) festhält:

$$(34) \qquad \int\limits_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = \int\limits_{(C')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta).$$

Dieses Resultat wird aber offenbar durch das Auftreten etwaiger Doppelpunkte bei C und C' in keiner Weise alterirt, da die Integrale über die auf diese Weise entstehenden Schleifen nach Gl. (33) jedesmal verschwinden.

Wenn endlich die Curven C und C' sich auch gegenseitig schneiden, sodass sie also mehrere nur in diesen Schnittpunkten zusammenstossende Flächentheile vollständig begrenzen, so werden zunächst die Integrale über die betreffenden Einzelbegrenzungen verschwinden müssen. Wählt man daher die einzelnen Integrationsrichtungen in der Weise, dass über die Theile der Curve C jedesmal in der Richtung $(x_0, y_0) \cdots (x, y)$, über diejenigen von C' in entgegengesetzter Richtung integrirt wird, so ergibt sich durch Addition der betreffenden Theilintegrale und schliessliche Umkehrung der

Integrationsrichtung für alle auf Stücke von C' zu erstreckenden Integrale wiederum die Richtigkeit der Beziehung (34).

Hieraus folgt aber, dass das Integral $\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ innerhalb des Gebietes U einen vom Integrationswege unabhängigen, eindeutig bestimmten Werth besitzt, sodass also in diesem Gebiete:

$$W(x, y) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) \tag{35}$$

bei variablem (x, y) und constantem (x_0, y_0) eine eindeutige Function von (x, y) darstellt. Bildet man sodann unter der Voraussetzung, dass die Stelle $x + h,\ y + k)$ gleichfalls dem Gebiete U angehört:

$$W(x + h, y + k) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x+h, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Integrationsweg dieses Integrals über (x, y) führen und erhält also durch Subtraction:

$$W(x + h, y + k) - W(x, y) = \int\limits_{x, y}^{x+h, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

und da man auch diesem Integrale ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen speciellen Integrationsweg zutheilen kann, nämlich die Horizontale von (x, y) bis $(x + h, y)$, dann die Verticale von $(x + h, y)$ bis $(x + h,\ y + k)$ (wobei nur h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass dieser Weg noch dem Gebiete U angehört), so folgt:

$$\begin{aligned} & W(x + h, y + k) - W(x, y) \\ & = \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y) \cdot dx + \int\limits_{y}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta \\ & = h \cdot P(x + \vartheta h, y) + k \cdot Q(x + h, \eta + \vartheta' k) \end{aligned} \tag{36}$$

d. h. $W(x, y)$ ist eine stetige Function von (x, y).

Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann speciell für $k = 0$, bezw. $k = 0$:

$$\frac{W(x+h, y) - W(x, y)}{h} = P(x + \vartheta h, y)$$

$$\frac{W(x, y+k) - W(x, y)}{k} = Q(x, y + \vartheta' k)$$

und hieraus durch Uebergang zur Grenze $h = 0$, bezw. $k = 0$:

$$(37) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y).$$

Hiemit ist aber der ausgesprochene Satz in allen Theilen bewiesen.

Zusätze. 1) Der Satz erleidet keine Aenderung, wenn die ursprünglich als ausnahmslos vorausgesetzte Stetigkeit von P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ gewisse Unterbrechungen erleidet oder die Relation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nicht durchgängig erfüllt ist. Man zeigt dies in der bekannten Weise, indem man die Ausnahmestellen, die für P, Q nur in einzelnen Punkten, für $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ (d. h. sowohl hinsichtlich der Stetigkeit dieser beiden Functionen, als auch in Bezug auf die Relation: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$) auch in einzelnen Linien bestehen dürfen, zuächst durch beliebig nahe anzuschmiegende, zur Gesammtbegrenzung von T' hinzuzufügende Curven ausschliesst und sodann nachweist, dass die Integrale über jede dieser Curven beliebig klein gemacht werden können, also das Gesammtresultat nicht alteriren.[1])

[1]) Der auf der Reduction des Doppelintegrals

$$\int\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy$$

beruhende Beweis gestattet freilich in Bezug auf $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ von vorn-

2) Erstreckt sich die gleichmässige Stetigkeit von P, Q mit eventuellem Ausschluss einzelner Punkte auch noch auf die Begrenzung von T, so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, auch wenn man es über die Begrenzung (T') erstreckt. Man erkennt dies, indem man zunächst ein Treppen-polygon (S) construirt denkt, dessen Ecken abwechselnd auf der Begrenzung und im Innern von T liegen, und sodann durch Verbindung der freien Eckpunkte ein gewöhnliches offenbar ganz innerhalb T liegendes Polygon (P) herstellt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Treppenstufen unterscheidet sich dann das Treppenintegral über (S) beliebig wenig von den beiden Integralen über (T) und (P), also kann auch die Differenz der beiden letzteren Integrale beliebig klein gemacht werden. Und da das Integral über (P) verschwindet, dasjenige über (T) jedenfalls einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass dieser Werth gleichfalls Null sein muss.

---

herein eine etwas allgemeinere Fassung der betreffenden Bedingungen, insofern für die Gültigkeit des Satzes nicht die Stetigkeit, sondern nur die Integrabilität von $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, genau gesagt die eindeutige Existenz von $\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$, $\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy$ in Frage kommt. Die genauere Feststellung der hiefür noch zulässigen Unstetigkeiten von $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}$ führt indessen auf Betrachtungen, mit deren Hülfe man ebensogut auch den hier gegebenen Beweis in analoger Weise verallgemeinern könnte. In der That braucht ja die Bedingung

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}$$

keineswegs für ein gewisses Gebiet R als ausnahmslos erfüllt vorausgesetzt werden, um daraus die Uebereinstimmung der beiden stetigen Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ (bis auf eine additive Constante) zu erschliessen. Ich gehe indessen auf derartige Verallgemeinerungen hier nicht ein, da mir dieselben für die Theorie der Functionen complexer Variablen keine sonderliche Bedeutung zu besitzen scheinen.

3) Kennt man eine innerhalb irgend eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes U von T eindeutige und stetige Function $F(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

so muss offenbar für jeden innerhalb U verlaufenden Integrationsweg die Beziehung bestehen:

$$F(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) + C,$$

da das rechtsstehende Integral mit $F(x, y)$ innerhalb U die Stetigkeit und die partiellen Differentialquotienten $P(x, y)$, $Q(x, y)$ gemein hat. Da aber das Integral für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet, so folgt:

$$F(x_0, y_0) = C$$

also schliesslich:

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = F(x, y) - F(x_0, y_0).$$

Sitzung vom 9. Februar 1895.

1. Herr KARL GÖBEL hält einen Vortrag: „Ueber directe Anpassung.“ Wird an einem anderen Orte veröffentlicht.

2. Herr NIKOLAUS RÜDINGER spricht: „Ueber Leucocytenwanderung in den Schleimhäuten des Darmkanales.“

3. Herr ALFRED PRINGSHEIM macht eine Mittheilung: „Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.“

4. Herr WALTER DYCK legt zwei Abhandlungen vor: Eine von dem correspondirenden Mitgliede der Classe Herrn Max Nöther in Erlangen: „Die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen“;

und eine weitere von Herrn Eduard v. Weber in München: „Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. O. mit drei Variabeln.“

5. Herr W. v. GÜMBEL überreicht eine Abhandlung des auswärtigen Mitgliedes der Classe F. v. Sandberger in Würzburg: „Ueber Blei- und Fahlerzgänge in der Gegend von Weilmünster und Runkel in Nassau.“

Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Begründet man die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen auf die Cauchy'sche Definition der monogenen Functionen und ihrer Integrale, so ergibt sich die Entwickelbarkeit einer für $0 \leqq |x| < R$ bezw. für $R_0 < |x| < R$ eindeutigen und monogenen Functionen nach positiven ganzen Potenzen von x (der „Cauchy'sche" Satz), bezw. nach positiven und negativen ganzen Potenzen von x (der „Laurent'sche" Satz) sowie der wahre Convergenz- und Geltungsbereich der betreffenden Entwickelungen ganz unmittelbar aus den bekannten Cauchy-schen Integralsätzen. Wesentlich anders liegt die Sache, wenn man die Eigenschaften der im Sinne des Herrn Weierstrass analytischen und monogenen, d. h. durch ein „Functionenelement" von der Form $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu$ und dessen analytische Fortsetzungen definirten Functionen auf elementarem Wege, also insbesondere ohne Anwendung der complexen Integration ableiten will. Gestaltet sich hier schon die Feststellung des wahren Convergenzbezirkes für die Entwickelung $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu\, (x - x_0)^\nu$ einer innerhalb eines einfach

zusammenhängenden, die Stelle x_0 enthaltenden Gebietes eindeutigen und analytischen Function ziemlich umständlich,[1]) so bietet die Erkenntniss der blossen Möglichkeit, eine in einem Ringgebiete um die Stelle x_0 eindeutige und analytische Function nach positiven und negativen Potenzen von $(x - x_0)$ zu entwickeln, bei dem jetzigen Stande der Theorie ganz unverhältnissmässige Schwierigkeiten: man erschliesst dieselbe entweder nach dem Vorgange des Herrn Mittag-Leffler[2]) aus einem von Herrn Weierstrass abgeleiteten Hülfssatze von ziemlich verwickelter Beschaffenheit,[3]) oder etwas kürzer mit Hülfe einer von Scheeffer herrührenden, im Grunde genommen zwar auf denselben Principien beruhenden, aber directeren Beweismethode.[4]) Indessen selbst dieser auf den ersten Blick relativ einfach erscheinende Scheeffer'sche Beweis setzt doch eine Reihe von Vorkenntnissen, namentlich über die Eigenschaften mehrdeutiger Functionen voraus, welche es unmöglich machen, den betreffenden Satz an der für einen natürlichen und consequenten Aufbau der elementaren Functionentheorie erforderlichen Stelle erscheinen zu lassen.

Hiernach dürfte es nicht ohne Interesse erscheinen, wenn ich im Folgenden einen neuen Beweis für die fragliche Entwickelungsform einer analytischen Function mittheile. Die Grundlagen der hierbei von mir angewendeten Methode finden sich zwar schon im Wesentlichen in einer Cauchyschen Abhandlung: „Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence"[5]): allein abgesehen davon, dass die dort gegebene

---

1) Cf. Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 180. Biermann, Theorie der analyt. Functionen, p. 165.

2) Acta mathematica, Bd. IV. p. 80.

3) Abhandl. aus der Functionenlehre, p. 28.

4) Acta mathematica, Bd. IV. p. 375.

5) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. I, p. 269.

Darstellung sich nur auf die Entwickelung einer Function nach positiven Potenzen bezieht, so enthält dieselbe auch verschiedene Lücken principieller Natur, und hierin mag wohl der Grund davon zu suchen sein, dass man, soviel ich weiss, auf jene Methode nicht wieder zurückgekommen ist,[1]) deren Kern in der Anwendung gewisser Mittelwerthe an Stelle der sonst bei der Coefficientendarstellung üblichen Integrale liegt. Derartige Mittelwerthe — nämlich Grenzwerthe von der Form $\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \cdot \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} f(x_{n,\nu}) \right\}$, wo die $x_{n,\nu}$ für jedes n und ν arithmetisch wohl definirte Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, dass $|x_{n,\nu+1} - x_{n,\nu}|$ mit wachsendem n beliebig klein wird — kann man natürlich stets auch als specielle Fälle von bestimmten Integralen auffassen. Immerhin haben dieselben mit dem Infinitesimalbegriff in Wahrheit absolut nichts zu thun, da es sich bei ihrer Bildung keineswegs um eine Summe schliesslich „unendlich

---

1) Ich bin nachträglich durch Herrn Dyck darauf aufmerksam gemacht worden, dass sich in: Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, T. I, p. 570 (in der deutschen Ausgabe von Harnack, T. I, p. 527) gleichfalls die Ableitung der Mac Laurin'schen Reihe mit Hülfe von Mittelwerthen findet. Die dort gegebene Darstellung ist im Wesentlichen eine Reproduction der im Texte citirten Cauchy'schen, bei welcher die erwähnten Lücken vermieden sind; allein der fragliche Beweis hat hierbei vollständig seinen elementaren Charakter verloren. Die dabei benützten „Mittelwerthe" sind in Wahrheit nur umständlicher geschriebene bestimmte Integrale mit veränderlichen Grenzen, die ausserdem noch von einem veränderlichen Parameter abhängen. Nach beiden Grössen wird differenzirt, wobei der Satz von der Differentiation eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze, sodann auch derjenige von der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge in Anwendung kommt; kurzum dieser Beweis gehört vollständig der Infinitesimalrechnung an und erscheint in der That weit einfacher und durchsichtiger, wenn man statt der benützten Mittelwerthe die üblichen Integralbezeichnungen anwendet.

klein" werdender, sondern lediglich um eine Summe wohl definirter, stets endlich bleibender Grössen, dividirt durch deren Anzahl, handelt. Hiernach ist aber ein solcher Mittelwerth genau in demselben Sinne „elementar" wie jeder gewöhnliche, von einer positiv wachsenden ganzen Zahl abhängige Grenzwerth, z. B. wie die sogenannte Summe einer unendlichen Reihe (die man ja schliesslich auch stets als speciellen Fall eines bestimmten Integrales auffassen kann), sodass gegen die Einführung derartiger Mittelwerthe in die elementare Functionentheorie irgendwelche principielle Bedenken schwerlich erhoben werden können, zumal die fraglichen Sätze auf diesem Wege eine Einfachheit und Abrundung erhalten, welche die mit Hülfe der complexen Integration erzielte noch merklich übertrifft. So lässt sich insbesondere der für diese ganze Betrachtung grundlegende Satz, dass der Mittelwerth einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ für die Stellen $|x| = r$ einen von r unabhängigen bestimmten Werth besitzt, weit leichter völlig streng begründen, als der entsprechende Cauchy'sche Integral-Satz für monogene Functionen (im Cauchy'schen Sinne); und es gestaltet sich die Darstellung der Entwicklungscoefficienten einer Potenzreihe durch solche Mittelwerthe wesentlich einfacher und natürlicher als die betreffende Integral-Darstellung, welche die Einführung des völlig fremdartigen, d. h. zu der Potenzentwickelung einer beliebigen analytischen Function in gar keiner nothwendigen Beziehung stehenden Factors $\frac{1}{2\pi i}$ nach sich zieht.

Im Uebrigen habe ich, um der folgenden Betrachtung einen möglichst elementaren Charakter zu wahren, absichtlich davon Abstand genommen, die Lehre von den Einheitswurzeln oder gar deren Darstellung durch trigonometrische Functionen, ja selbst auch nur den Satz von der Wurzelexistenz einer algebraischen Gleichung zu benützen. Vielmehr stütze

ich mich lediglich auf den elementaren Satz, dass eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 = \beta + \gamma i$ stets zwei und nur zwei verschiedene, vermittelst reeller Quadratwurzelausziehungen zu berechnende Wurzeln besitzt.

§ 1.

Ist $\gamma > 0$, β beliebig, so hat man bekanntlich:

$$(1)\qquad \sqrt{\beta + \gamma i}$$
$$= \pm \left\{ \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2} + \tfrac{1}{2}\beta} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2} - \tfrac{1}{2}\beta} \right\},$$

wo sämmtliche Quadratwurzeln auf der rechten Seite positiv zu nehmen sind. Dabei soll derjenige Wurzelwerth, welcher resultirt, wenn man auf der rechten Seite als Gesammtvorzeichen das positive wählt, der Kürze halber schlechthin als der positive Werth von $\sqrt{\beta + \gamma i}$ bezeichnet werden.

Sei nun ferner $N = 2^n$, so lassen sich offenbar die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$(2)\qquad x^N = 1$$

mit Hülfe von n successiven Quadratwurzelausziehungen berechnen, dergestalt, dass allgemein:

$$(3)\qquad x = \pm \sqrt[1]{\quad \pm \sqrt[2]{\quad \pm \cdots \pm \sqrt[n-1]{\quad \pm \sqrt[n]{1}}}}$$

(wobei die Indices an den einzelnen Wurzelzeichen lediglich zur Charakterisirung ihrer Anzahl dienen). Daraus folgt zunächst, dass die Anzahl der verschiedenen Wurzelwerthe nur $\leq 2^n$, also $\leq N$ sein kann.

Unter den auf diese Weise sich ergebenden Wurzeln ist eine besonders ausgezeichnet, welche aus $\sqrt[4]{1} = + i$ ent-

steht, wenn man bei jeder weiteren Wurzelausziehung die im obigen Sinne definirte positive Wurzel beibehält. Bezeichnet man dieselbe durch:

$$\alpha_n = \beta_n + \gamma_n i \tag{4}$$

so ergibt sich mit Hülfe der Formel (1):

$$\left\{\begin{aligned} \beta_n &= \underset{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underset{n-2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}}}} \\ \gamma_n &= \underset{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underset{n-2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}}}} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Man erkennt alsdann leicht:

1) dass keine Wurzel der Gl. (2) mit positiv reellem und positiv imaginärem Theile existirt, welche näher an der positiven Einheit liegt als α_n;

2) dass die Potenzen $\alpha_n^0, \alpha_n^1, \cdots \alpha_n^{N-1}$ durchweg von einander verschieden sind und der Gl. (2) genügen, also die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung darstellen;

3) dass diesen N-Werthen ebensoviele, in der gleichen Anordnung auf einander folgende, aequidistante Punkte auf dem Einheitskreise entsprechen, deren constanter Abstand $|1 - \alpha_n|$ der Bedingung genügt:

$$|1 - \alpha_n| < \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^{n-3}. \tag{6}$$

Nun bedeute $f(x)$ eine für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ eindeutig definirte und im Allgemeinen stetige Function, so soll gesetzt werden:

$$\mathfrak{M}_n(f(r)) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}{}_{\nu}\, f(\alpha_n^{\nu} \cdot r), \tag{7}$$

sodass also $\mathfrak{M}_n(f(r))$ das arithmetische Mittel aus den Werthen bedeutet, welche $f(x)$ an den N-Stellen $x = \overset{\nu}{a}_n \cdot r$ ($\nu = 0, 1, \cdots N-1$) annimmt. Aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ längs des Kreises $|x| = r$ und der Beziehung (6) ergibt sich sodann, dass $\mathfrak{M}_n(f(r))$ mit unbegrenzt wachsenden Werthen von n einer festen Grenze zustrebt, sodass die Bezeichnung:

$$(8) \qquad \mathfrak{M}(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n(f(r))$$

einen bestimmten Sinn besitzt. Zugleich erkennt man unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{M}(f(r))$, dass:

$$(9) \qquad \mathfrak{M}(K \cdot f(r)) = K \cdot \mathfrak{M}(f(r)),$$

wenn K einen beliebigen für alle x mit dem absoluten Betrage r constanten Factor bedeutet; und ferner:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{M}(f_1(r) + \cdots + f_k(r)) \\ &= \mathfrak{M}(f_1(r)) + \cdots + \mathfrak{M}(f_k(r)), \end{aligned}$$

wenn man mit $f_1(x) \ldots f_k(x)$ Functionen von analoger Beschaffenheit wie $f(x)$ bezeichnet.

Ist jetzt $\varphi(x)$ eindeutig und analytisch für alle x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$ (wobei eventuell auch $R_0 = 0$ sein kann), so besteht der Satz, dass $\mathfrak{M}(\varphi(r))$ für $R_0 \leqq r < R$ einen bestimmten von r unabhängigen Werth besitzt, sodass also:

$$\mathfrak{M}(\varphi(r)) = \mathfrak{M}(\varphi(r')),$$

wenn $R_0 \leqq r < r' \leqq R$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Hülfssatze[1]) des Inhalts, dass der Differenzenquotient $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$

---

[1]) Beweis dieses Hülfssatzes s. am Ende von § 1.

für alle x des betreffenden Gebietes und hinlänglich kleine Werthe von h eine gleichmässig stetige Function von h ist, d. h. man kann jeder beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse δ so zuordnen, dass für alle x des Gebietes: $R_0 \leqq |x| \leqq R$ die Beziehung besteht:

$$(10) \quad \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k} \right| < \varepsilon, \quad \text{falls} \left\{ \begin{matrix} |h| \\ |k| \end{matrix} \right\} \leqq \delta.$$

Angenommen nun, man habe $r > 0$ beliebig klein fixirt, so bestimme man zunächst eine positive ganze Zahl m so, dass die positive Grösse:

$$\frac{r' - r}{m} = \delta$$

klein genug wird, um die Gültigkeit der Ungleichung (10) für $|h| \leqq \delta$, $|k| \leqq \delta$ zu sichern. Wählt man hierauf die positive ganze Zahl n bezw. $N = 2^n$ gross genug, dass:

$$r' \cdot |1 - a_n| \leqq \delta \quad (\text{also a fortiori } r \cdot |1 - a_n| < \delta),$$

so hat man:

$$\left| \frac{\varphi(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{a_n^\nu \cdot \delta} - \frac{\varphi(a_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{a_n^\nu (a-1) \cdot r} \right| < \varepsilon$$

oder nach Multiplication mit δ und Berücksichtigung von $|a_n^\nu| = 1$:

$$\left| \varphi(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \varphi(a_n^\nu \cdot r) - \delta \cdot \frac{\varphi(a_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{(a-1) \cdot r} \right| < \delta \cdot \varepsilon$$

Setzt man der Reihe nach $\nu = 0, 1, \ldots (N-1)$ und addirt die resultirenden Ungleichungen, so heben sich offenbar alle von dem dritten Gliede der linken Seite herrührenden Be-

standtheile vollständig heraus (NB. es ist ja insbesondere $a_n^N \cdot r = a_n^0 \cdot r$), und es ergibt sich:

$$\left| \sum_0^{N-1} {}_\nu\, \varphi\,(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \sum_0^{N-1} {}_\nu\, \varphi\,(a_n^\nu \cdot r) \right| < N \cdot \delta \cdot \varepsilon$$

oder nach Division mit N:

$$| \mathfrak{M}_n\,(\varphi\,(r+\delta)) - \mathfrak{M}_n\,(\varphi\,(r)) \,| < \delta \cdot \varepsilon$$

und daher, wenn man r ins Unendliche wachsen lässt:

$$| \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r+\delta)) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r)) \,| \leqq \delta \cdot \varepsilon.$$

Schreibt man in dieser Ungleichung $r+(\mu-1)\,\delta$ statt r (wo: $r+(\mu-1)\cdot\delta < r'$ für $\mu = 1, 2, \ldots m$ — also auch: $(r+(\mu-1)\,\delta)\cdot|1-a_n| < \delta$), so wird:

$$| \mathfrak{M}\,(\varphi(r+\mu\,\delta)) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r+\overline{\mu-1}\cdot\delta)) \,| < \delta \cdot \varepsilon,$$

und wenn man die für $\mu = 1, 2, \ldots m$ hieraus resultirenden Ungleichungen addirt und beachtet, dass: $m \cdot \delta = r' - r$, schliesslich:

$$| \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r')) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r)) \,| < (r'-r) \cdot \varepsilon.$$

Da aber ε von vornherein beliebig klein angenommen werden kann, und andererseits $\mathfrak{M}\,(\varphi\,(r'))$, $\mathfrak{M}\,(\varphi\,(r'))$ eindeutig bestimmte Werthe besitzen, so muss geradezu:

$$(11) \qquad | \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r')) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r)) \,| = 0$$

sein, womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Beweis des Hülfssatzes. Für jede Stelle x des Bereiches $R_0 < |x| < R$ gilt eine Entwickelung von der Form:

$$\varphi\,(x+h) = \sum_0^\infty {}_\nu\, \frac{\varphi^{(\nu)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu$$

deren wahrer Convergenzradius bekanntlich eine mit x stetig veränderliche, positive Grösse ist und demnach ein bestimmtes von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen muss. Fixirt man nun eine positive Grösse:

$$\delta < \varrho$$

so ist für alle x und h des Bereiches: $R_0 < |x| \leq R$ und $|h| \leq \delta$ die Reihenentwickelung (12) gültig und absolut convergent, und daher auch in dem gleichen Umfange:

$$\varphi''(x+h) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu .$$

Da aber für den angegebenen Werthebereich $\varphi''(x+h)$ eine stetig veränderliche Function ihres Argumentes ist, so besitzt daselbst $|\varphi''(x+h)|$ ein bestimmtes endliches Maximum g, und es ist daher nach einem bekannten Satze:

$$(13) \qquad \left| \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu \right| < g \qquad \text{für:} \begin{cases} R_0 \leq |x| \leq R \\ |h| \leq \delta. \end{cases}$$

Setzt man nun Gl. (12) in die Form:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) = h \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{(\nu+2)!} \cdot h^\nu ,$$

so hat man für $h < \delta$ mit Benützung von Ungl. (13):

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) \right| < g \cdot |h| \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\text{d. h.} < g \cdot |h|$$

und daher, wenn auch $|k| < \delta$ angenommen wird:

$$(14) \qquad \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k} \right|$$
$$< g \{ |h| + |k| \} < 2 g \cdot \delta ,$$

sodass also die fragliche Differenz unter ε herabsinkt, wenn von vornherein $\delta < \frac{\varepsilon}{2g}$ angenommen wird.

§ 2.

Lehrsatz. Ist $f(x)$ eine eindeutige und analytische Function für alle Stellen x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$, so gilt für dieses Gebiet die Entwickelung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{\mu}\, a_{\mu} \cdot x^{\mu}$$

wo:

$$a_{\mu} = \mathfrak{M}\,(r^{-\mu} \cdot f(r))$$

und r einen beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet. Ist insbesondere $R_0 = 0$, so reducirt sich die obige Entwickelung auf die folgende:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\mu}\, a_{\mu} \cdot x^{\mu}.$$

Beweis. Bezeichnet man mit x_0 irgend eine willkürlich gewählte Stelle im Innern des fraglichen Bereiches, sodass also $R_0 < |x_0| < R$ und setzt man:

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

so ist $\varphi(x)$ für alle x des Bereiches $R_0 \leqq x \leqq R$ gleichfalls eindeutig und analytisch. Man erkennt dies ohne Weiteres für jede von x_0 verschiedene Stelle x; in der Umgebung der Stelle x_0 hat man aber:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{1}^{\infty} {}_{\mu}\, \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}\,(x - x_0)^{\mu}$$

also:

$$\varphi(x) = x \cdot \sum_{1}^{\infty} \mu \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} (x - x_0)^{\mu-1}$$

d. h. $\varphi(x)$ ist dort gleichfalls analytisch. In Folge dessen ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\left(R_0 \cdot \frac{f(R_0) - f(x_0)}{R_0 - x_0}\right) = \mathfrak{M}\left(R \cdot \frac{f(R) - f(x_0)}{R - x_0}\right)$$

oder mit Berücksichtigung von Gl. (9) und (10) des § 1:

$$(15) \quad \begin{aligned} f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) &- f(x_0)\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right) \\ &= \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) - \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) \end{aligned}$$

Nun ist:

$$(16) \quad \frac{R}{R - x_0} = \sum_{0}^{m-1} \mu \left(\frac{x_0}{R}\right)^{\mu} + \left(\frac{x_0}{R}\right)^{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_0}{R}}$$

$$(17) \quad \frac{R_0}{R_0 - x_0} = - \sum_{1}^{m-1} \mu \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_0}{x_0}}$$

und daher:

$$(17) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) \\ &= \sum_{0}^{m-1} \mu\, \mathfrak{M}\left(R^{-\mu} \cdot f(R)\right) \cdot x_0^{\mu} + x_0^{m} \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^{m}\left(1 - \frac{x_0}{R}\right)}\right). \end{aligned}$$

Da nun:

$$(18) \quad \left| x_0^{m} \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^{m}\left(1 - \frac{x_0}{R}\right)}\right) \right| < \left|\frac{x_0}{R}\right|^{m} \cdot \frac{F(R)}{1 - \left|\frac{x_0}{R}\right|}$$

wenn $F(R)$ das Maximum der absoluten Beträge von $f(x)$ für $|x| = R$ bezeichnet, so folgt, dass dieser letztere Aus-

druck mit unbegrenzt wachsenden Werthen von m gegen Null convergirt, und zwar, wenn $r < R$ angenommen wird, offenbar gleichmässig für alle x_0, welche der Bedingung genügen: $|x_0| \leqq r$. Lässt man also in Gl. (17) m ins Unendliche wachsen, so wird:

$$(19) \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) = \sum_0^\infty {}_\mu \, \mathfrak{M}\,(R^{-\mu} \cdot f(R) \cdot x_0^\mu$$

wobei diese Reihe zunächst unbedingt und gleichmässig convergirt für $|x_0| \leqq r < R$. Es lässt sich indessen leicht zeigen, dass dies auch noch für $|x_0| = R$ der Fall sein muss. Da nämlich $f(x)$ nach Voraussetzung noch für $|x| = R$ analytisch sein sollte, so gehört zu jeder Stelle x' des Kreises mit dem Radius R eine angebbare Umgebung, für welche $f(x)$ nach Potenzen von $(x - x')$ entwickelbar ist. Diese Umgebung muss dann ein gewisses, von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen. Nimmt man alsdann eine positive Grösse $\delta < \varrho$ an, so folgt, dass $f(x)$ auch noch für $|x| \leqq R + \delta$ analytisch ist. Alsdann besteht aber eine Beziehung von der Form (19), sofern man daselbst R durch $R + \delta$ ersetzt, und diese muss nach dem Gesagten unbedingt und gleichmässig convergiren für $|x_0 < r < R + \delta$, also insbesondere für $|x_0| = R$. Da aber nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\,((R+\delta)^{-\mu} f(R+\delta)) = \mathfrak{M}\,(R^{-\mu} \cdot f(R)),$$

so ist die zuletzt genannte Entwickelung von der in Gl. (19) nicht verschieden, sodass also diese letztere in der That noch für $|x_0| = R$ unbedingt und gleichmässig convergirt.

Analog ergibt sich aus Gl. (17):

$$(20) \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0 - x_0}\right)$$
$$= -\sum_1^{m-1} {}_\mu \, \mathfrak{M}\,(R_0^\mu \cdot f(R)) \cdot x_0^{-\mu} - x_0^{-m} \, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m f(R_0)}{1 - \frac{R_0}{x_0}}\right)$$

Da aber:

$$(21) \qquad \left| x_0^{-m}\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m \cdot f(R_0)}{1-\frac{R_0}{x_0}}\right)\right| < \left|\frac{R_0}{x_0}\right|^m \cdot \frac{F(R_0)}{1-\left|\frac{R_0}{x_0}\right|},$$

(wenn wiederum $F(R_0)$ das Maximum von $|f(x)|$ für $|x| = R_0$ bezeichnet), und da dieser Ausdruck wegen $|x_0| > R_0$ mit unendlich wachsendem m gegen Null convergirt, so hat man:

$$(22) \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 \cdot f(R)}{R_0 - x_0}\right) = -\sum_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(R_0^\mu f(R)) \cdot x^{-\mu}.$$

Diese Reihe convergirt dann zunächst wieder unbedingt und gleichmässig für $|x_0| > R_0$: es folgt aber genau wie oben, dass dies auch noch für $|x_0| = R_0$ der Fall sein muss, sofern man vorläufig $R_0 > 0$ annimmt. (Der Fall $R_0 = 0$ wird weiter unten besprochen werden).

Da die in den Entwickelungen (19) und (22) als Coefficienten auftretenden Mittelwerthe nach dem Satze des vorigen Paragraphen (in dem durch die analytische Beschaffenheit von $f(x)$ bezw. $x^{\pm\mu} \cdot f(x)$ gegebenen Umfange) von R bezw. R_0 unabhängig sind, so kann man die Gleichungen (19) und (22) auch durch die folgenden ersetzen:

$$(23) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) = \sum\limits_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^{-\mu} \cdot f(r)) \cdot x_0^\mu \\ \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0 \cdot f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) = -\sum\limits_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^\mu \cdot f(r)) \cdot x_0^{-\mu} \end{cases}$$

wo r einen ganz beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet. Ersetzt man jetzt in (23) $f(x)$ durch die Einheit, so folgt insbesondere:

$$(24) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R - x_0}\right) = \sum\limits_0^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^{-\mu}) \cdot x_0^\mu & (\text{wo: } |x_0| \leqq R) \\ \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R_0 - x_0}\right) = -\sum\limits_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^\mu) \cdot x_0^{-\mu} & (\text{wo: } |x_0| \geqq R_0) \end{cases}$$

Nun ist aber für $\mu \geqq 1$ — falls n von vornherein so gewählt wird, dass $N = 2^n > \mu$:

$$\mathfrak{M}_n\left(r^{\pm\mu}\right) = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}{}_{\nu}\, a_n^{\pm\mu\cdot\nu} \cdot r^{\pm\mu} = \frac{1}{N}\cdot r^{\pm\mu}\cdot\frac{1-a_n^{\pm\mu\cdot N}}{1-a_n^{\pm\mu}} = 0,$$

also auch:

$$\mathfrak{M}\left(r^{\pm\mu}\right) = 0.$$

Dagegen für $\mu = 0$, offenbar:

$$\mathfrak{M}_n\left(r^0\right) = 1, \quad \text{also auch:} \quad \mathfrak{M}\left(r^0\right) = 1,$$

sodass die Gleichungen (24) sich auf die folgenden reduciren:

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{M}\left(\frac{R}{R-x_0}\right) = 1 \\ &\mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0-x_0}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Mit Benützung der in Gl. (23) und (25) enthaltenen Resultate geht dann Gl. (15) — wenn man statt x_0 jetzt x schreibt — in die folgende über:

$$(26) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\cdot f(r)\right)\cdot x^{\mu} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\, \mathfrak{M}\left(r^{\mu}\cdot f(r)\right)\cdot x^{-\mu} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\cdot f(r)\right)\cdot x^{\mu} \end{aligned}$$

wobei also diese Entwickelung unbedingt und gleichmässig convergirt für $R_0 \leqq |x| \leqq R$, und die in den Coefficienten auftretende Grösse r einen beliebig zu wählenden Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet.

Ist jetzt speciell $R_0 = 0$, so kann man zunächst in den Coefficienten von der Form $\mathfrak{M}\left(r^{\mu}\cdot f(r)\right)$ für $\mu \geqq 1$ $r = 0$ setzen. Alsdann wird aber:

$$\mathfrak{M}_n\,(r^{\mu}\cdot f(r))_{r=0} = 0 \quad \text{also auch:} \quad \mathfrak{M}\,(r^{\mu}\cdot f(r)) = 0$$

sodass Gl. (26) sich auf die folgende reducirt:

$$(27) \qquad f(x) = \sum_0^{\infty}{}_{\mu}\, \mathfrak{M}\,(r^{-\mu}\cdot f(r))\cdot x^{\mu}$$

Dabei würde nach dem oben Gesagten diese Entwickelung zunächst gültig sein für $0 < |x| \leqq R$. Man erkennt aber unmittelbar, dass sie auch noch für $x = 0$ besteht. Im Falle $x = 0$ geht nämlich die rechte Seite über in:

$$\mathfrak{M}\,(f(r))$$

und da man hier wiederum $r = 0$ setzen darf, so folgt:

$$\mathfrak{M}\,(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n\,(f(r))_{r=0} = f(0)$$

d. h. Gl. (27) gilt in der That auch für $x = 0$.

Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz I. Ist $f(x)$ nur für das Gebiet $R_0 < |x| < R$ eindeutig und analytisch, so gilt die Entwickelung (26) zunächst für jedes Gebiet $R_0' \leqq |x| \leqq R'$, sofern nur R_0', R' der Bedingung genügen: $R_0 < R_0' < R' < R$: sie gilt somit schliesslich für alle x des Gebietes $R_0 < |x| < R$. Sind also $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ die wahren Convergenzgrenzen der betreffenden Entwickelung, so muss $f(x)$ für $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ mindestens eine singuläre Stelle besitzen.

Bleibt $f(x)$ beim Uebergange von Werthen mit dem absoluten Betrage $|x| < R$ bezw. $|x| > R_0$ zu solchen mit dem absoluten Betrage $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ noch im allgemeinen gleichmässig stetig, und ist $f(x)$ für $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ durchweg endlich, so kann man offenbar die in den Coefficienten auftretende Grösse r eventuell

auch durch R bezw. R_0 ersetzen, da in diesem Falle die Differenzen:

$$\mathfrak{M}(R^{\mu}\cdot f(R)) - \mathfrak{M}(R'^{\mu}\cdot f(R'))$$

$$\text{bezw.}\quad \mathfrak{M}(R_0^{\mu}\cdot f(R_0) - \mathfrak{M}(R_0'^{\mu}\cdot f(R_0'))$$

beliebig klein gemacht werden können.

Zusatz II. Man erkennt leicht, dass der bewiesene Satz auch umkehrbar ist, d. h. wenn die Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu}\, a_{\mu}\, x^{\mu} = f(x)$$

zum Mindesten für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ gleichmässig convergirt, so hat man:

$$a_{\mu} = \mathfrak{M}(r^{-\mu}\cdot f(r)).$$

Hieraus ergibt sich dann die Eindeutigkeit einer derartigen Entwickelung zunächst in dem Umfange, dass aus dem Bestehen der Gleichung:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\, a_{\mu}\cdot x^{\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\, b_{\mu}\cdot x^{\mu},$$

zum Mindesten für alle x mit einem gewissen absoluten Betrage $|x| = r$, für welche jene Reihen gleichmässig convergiren, deren Identität folgt. Auch hat es keine besondere Schwierigkeit, diesen Identitätsbeweis auf den Fall auszudehnen, dass die Gleichheit der beiden Reihensummen nur für irgend eine unendliche Punktmenge feststeht.

Fehlen in der betrachteten Reihe die negativen Potenzen, sodass also:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, a_{\mu}\cdot x^{\mu}$$

so hat man offenbar:

$$\mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\cdot f(r)\right) = \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(0).$$

Jene Mittelwerthe stellen also in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der Ableitungen von $f(x)$ für $x=0$ dar.

Die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung gehen.

Von M. Nöther in Erlangen.

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Für die 315 Kegelschnitte, welche eine Curve 4. Ordnung in den Berührungspunkten von vier ihrer Doppeltangenten treffen, hat O. Hesse zuerst angegeben (Crelle's Journ., Bd. 40), dass man aus ihnen 7-Systeme bilden kann, die je durch die Berührungspunkte aller 28 Doppeltangenten hindurchgehen. Auf die von ihm (Cr. J. 49) gestellte Frage nach allen derartigen 7-Systemen bin ich in Bd. 15 der Mathem. Annalen[1]) so weit eingegangen, dass ich einmal 135 irreductible 7-Systeme mit „Tripeleigenschaft" nachwies, sodann 315.24 uneigentliche Systeme construirte, in welchen je einer der Kegelschnitte ausgezeichnet war. Aus Anlass der von der k. b. Akad. d. Wiss. demnächst erfolgenden Herausgabe der gesammelten Abhandlungen Hesse's möchte ich die Frage hier vollständig beantworten.

1. Bezeichnungen und Beziehungen. Ich bediene mich der Bezeichnung (ik), wo i, k von $1, 2, \ldots 8$ gehen, $k \gtrless i$, für die Doppeltangenten („Dtgn.") und der in dem ge-

[1]) „Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung."

nannten Aufsatz, oder auch in Abhandl. d. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 17,[1]) auseinandergesetzten Rechenregeln. Von diesen übrigens nur der folgenden: In einer Combination zu μ, $i_1 k_1\, i_2 k_2 \ldots i_\mu k_\mu$, ist die Anordnung der Zahlen gleichgültig und zwei gleiche Zahlen heben sich gegenseitig auf. Ist μ gerade, so gelangt man, indem man $[12 \ldots 8] = 0$ setzt, zu den 63 gleichberechtigten Steiner'schen Gruppen („St. Gr.") $[ik]$, $[iklm]$; für ungerades μ zu den 28 (ik) und zu 36 unter einander gleichberechtigten $(iklm)$ und $(12 \ldots 8)$. Jede St. Gr. $[a]$ lässt sich auf 6 Arten in Paare der Art $i_1 k_1 .\; i_2 k_2$ zerlegen, und jede der zwölf entsprechenden Dtgn. (ik) heisst: „in $[a]$ enthalten." Zwei St. Gr. $[a]$, $[b]$ heissen „syzygetisch" (Ausdruck von Frobenius), wenn $[b]$ sich gegen die beiden Dtgn. eines Paares von $[a]$ gleichmässig verhält, d. h. beide enthält oder beide nicht enthält. Drei syzygetische St. Gr. $[a]$, $[b]$, $[ab]$ von der Combination $[abab] = 0$, mögen ein „Steiner'sches Tripel" heissen; sie enthalten vier Dtgn. gemeinsam, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ liegen; die 315 Kegelschnitte

$$\mathfrak{K} = i_1 k_1 \cdot i_2 k_2 \cdot i_3 k_3 \cdot i_4 k_4, \qquad \text{wo } [i_1 k_1\, i_2 k_2\, i_3 k_3\, i_4 k_4] = 0,$$

und die 315 Steiner'schen Tripel

$$[i_1 k_1\, i_2 k_2], \; [i_1 k_1\, i_3 k_3], \quad [i_1 k_1\, i_4 k_4] \qquad [i_2 k_2\, i_3 k_3]$$

entsprechen sich so eindeutig; zu jedem $\mathfrak{K}$ „gehören" drei St. Gr. eines Tripels.

Die Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ sind von mir Math. Ann. 15 gegeben worden, ausführlicher von Pascal,[2]) der auch die Beziehungen zwischen dreien der $\mathfrak{K}$ abgeleitet hat. Ich benütze davon Folgendes:

---

[1]) „Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung."

[2]) Rendiconti d. R. Accad. dei Lincei, 1892 Nr. 11, 12; 1893 Nr. 1.

Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, welche keine Doppeltangente gemeinsam haben, stehen in „Beziehung erster Art" $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ oder „zweiter Art" $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_2$, je nachdem die beiden zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gehörigen St.'schen Tripel eine St. Gr. gemeinsam haben oder nicht. Zu einem $\mathfrak{K}$ gibt es 18 $\mathfrak{K}'$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ gilt, 144 $\mathfrak{K}'$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_2$ ist. Aus dem „Zerlegungsschema" eines $\mathfrak{K}$, nämlich aus

$$K = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78$$
$$\begin{array}{llllll} [1234] = & 13 \cdot 24, & 14 \cdot 23, & 57 \cdot 68, & 58 \cdot 67 \\ [1256] = & 15 \cdot 26, & 16 \cdot 25, & 37 \cdot 48, & 38 \cdot 47 \\ [1278] = & 17 \cdot 28, & 18 \cdot 27, & 35 \cdot 46, & 36 \cdot 45, \end{array}$$

erhält man die K', für welche $(KK')_1$, indem man zwei Paare einer Horizontalreihe zusammenfasst, wie etwa $13 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 23$; und die K'', für welche $(KK'')_2$, indem man aus zwei der drei Reihen je zwei $i\,k$ so herausnimmt, dass die Gesammtcombination 0 ergibt, wie $13 \cdot 14 \cdot 37 \cdot 47$. Die 18 ersteren K' zerfallen dem zu Grunde gelegten K gegenüber in 9 Paare, indem ein solches Paar $K_1\,K_2$ eine Horizontalreihe von K erschöpft; solche drei Kegelschnitte K, K_1, K_2 bilden ein „Tripel erster Art" $(K\,K_1\,K_2)_1$, dessen Glieder gleichartig eingehen und alle derselben St. Gr. $[a]$ zugeordnet sind, während umgekehrt eine St. Gr. $[a]$ auf 15 verschiedene Tripel der Art $(KK_1K_2)_1$ führt. Von letzteren existiren $63 \cdot 15$. Auch die 144 K'' zerlegen sich K gegenüber in 72 Paare, der Art $(K_1''\,K_2'')_1$, indem K_2'' jene 4 Dtgn. enthält, welche die 4 Dtgn. von K_1'' in den beiden ausgezeichneten St. Gr. von K zu Paaren ergänzen. Einem Paar 2. Art $(KK'')_2$, ist ein Kegelschnitt K' „conjugirt", für welchen $(KK')_1$, $(K''K')_1$ ist; derselbe kann dadurch erhalten werden, dass man aus den beiden, gegen einander syzygetischen, St. Gr. von K und K'', von welchen die erstere keine Dtg. von K'', die zweite keine Dtg. von K enthält, die vier gemeinsamen Dtgn. herausnimmt.

Im obigen Beispiel bilden

$$K, K_1 = 13\cdot24\cdot14\cdot23, \qquad K_2 = 57\cdot68\cdot58\cdot67$$

ein Tripel erster Art;

$$K_1'' = 13\cdot14\cdot37\cdot47, \qquad K_2'' = 24\cdot23\cdot48\cdot38$$

sind zweiter Art gegen K und gegen K gepaart; durch K und K'' sind die St. Gr. [1278], [34] ausgezeichnet, welche zu dem, zu $(KK_1'')_2$ conjugirten $K' = 35\cdot36\cdot45\cdot46$ führen.

2. Siebentripelsysteme. Ein solches System entsteht aus K, indem man aus jeder der drei St. Gr. von K diesen Kegelschnitt zu einem Tripel erster Art ergänzt; aber so, dass nur Beziehungen erster Art entstehen. Durch das erste Tripel ist das Quadrupel der vier übrigen Kegelschnitte schon bestimmt. So gibt es $\frac{63\cdot15}{7} = 135$ solcher Systeme, je 7 Tripel enthaltend.

Einem solchen System entspricht ein Tripelsystem von 7 Steiner'schen Gruppen und zwar je den Elementen des einen Systems die Tripel des anderen (vergl. das System S, Math. Ann. 15, pag. 95). Man erhält dasselbe einfach aus drei syzygetischen St. Gr. $[a]$, $[b]$, $[c]$, für welche $[abc]$ nicht $= 0$ ist, in

$$[a],\ [b],\ [c],\ [ab],\ [ac],\ [bc],\ [abc].$$

3. Eigentliche Siebensysteme zweiter Art. Es gibt 5! 36·8 eigentliche (irreductible) Systeme zweiter Art von je 7 Kegelschnitten $\mathfrak{K}$, deren Glieder alle in Beziehung zweiter Art zu einander stehen. Jedes solches System führt auf eine Galois'sche (also algebraisch lösbare) Gleichung 7. Grades. Dieselben sind, je zu 120, den 36·8 Aronhold-schen 7-Systemen von Dtgn. zugeordnet.

Ein solches 7-$\mathfrak{K}$-System ist z. B.

$$K_0 = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78$$
$$K_1 = 14 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 68, \quad K_2 = 15 \cdot 36 \cdot 47 \cdot 28, \quad K_3 = 16 \cdot 24 \cdot 57 \cdot 38,$$
$$K_4 = 13 \cdot 25 \cdot 67 \cdot 48, \quad K_5 = 26 \cdot 37 \cdot 45 \cdot 18, \quad K_6 = 17 \cdot 23 \cdot 46 \cdot 58.$$

Um die Eigenschaft desselben zu erkennen, dass aus irgend zwei der 7 Kegelschnitte die übrigen sich eindeutig ergeben, beachte man, dass, K_0 gegenüber, sich die übrigen 6 in 3 Paare $K_1 K_6$, $K_2 K_5$, $K_3 K_4$ ordnen, derart, dass der einem Paare $(K_1 K_6)_2$ „conjugirte" Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{16}$ mit K_0 (und nur mit K_0) zwei Doppeltangenten gemein hat; ebenso bez. $(K_2 K_5)_2$ und bez. $(K_3 K_4)_2$. Dieselben sechs $\mathfrak{K}$ ordnen sich, K_0 gegenüber, auch in zwei Cyklen 2. Ordnung, $K_1 K_4 K_2$ und $K_6 K_3 K_5$; insofern man von $(K_0 K_1)_2$ auf K_4, von $(K_0 K_4)_2$ auf K_2, von $(K_0 K_2)_2$ auf K_1, und ebenso von $(K_0 K_6)_2$ auf K_3, von $(K_0 K_3)_2$ auf K_5, von $(K_0 K_5)_2$ auf K_6 kommt, genau so wie vorher von $(K_1 K_6)_2$ auf K_0. Und analog ist es, wenn man, statt von K_0, von einem der übrigen sechs $\mathfrak{K}$ ausgeht.

Die Gleichung 7. Grades, welche dem 7-Systeme entspricht, hat also für die Indices i der 7 Kegelschnitte die metacyklische Substitutionsgruppe

$$(i \,|\, \beta i + \alpha), \qquad \left\{\begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots 6 \\ \alpha = 0, 1, \ldots 6 \\ \beta = 1, 2, \ldots 6 \end{array}\right\} \text{ mod. } 7.$$

Ferner ist für das obige System in K_0 die Dtg. (78) vor den übrigen dreien insofern ausgezeichnet, als in den 3 Kegelschnitten $\mathfrak{K}_{16}$, $\mathfrak{K}_{43}$, $\mathfrak{K}_{25}$, welche je den obigen drei Paaren $(K_1 K_6)_2$, $(K_4 K_3)_2$, $(K_2 K_5)_2$ conjugirt sind, jedesmal die Dtg. (78), aber nur je eine der drei übrigen Dtgn. von K_0 vorkommt; und auch dadurch, dass, wenn man die 6 Kegelschnitte $K_1, \ldots K_6$ auf andere Weise paarweise zusammennimmt und jedesmal den conjugirten $\mathfrak{K}$ aufstellt, (78) niemals, die übrigen

drei Dtgn. von K_0 aber je zweimal vorkommen. Auf diese Weise ist in dem obigen System das hervorgehobene Aronhold'sche 7-System von Dtgn. ausgezeichnet, das, combinirt, (12345678) liefert.

Zugleich folgt, dass mittelst des Siebenkegelschnittsystems die 28 Dtgn. alle eindeutig bestimmt sind. Und da die Gleichung für diese Dtgn. eine Gruppe von 8! 36 Substitutionen besitzt, das 7-$\mathfrak{K}$-System aber eine solche von $7 \cdot 6$ Substitutionen, so existiren $5! \, 36 \cdot 8$ der genannten 7-Systeme. Man erhält dieselben sämmtlich aus dem obigen speciellen, indem man etwa erst auf die Doppeltangentenindices $1, 2, \ldots 5$ alle 120 Vertauschungen ausübt, was das zugehörige Aronhold'sche 7-System nicht ändert, und indem man dann noch diejenigen Substitutionen vornimmt, welche letzteres System in die $36 \cdot 8$ Aronhold'schen 7-Systeme überzuführen erlauben.

4. Uneigentliche Siebensysteme.

a) Man ergänzt, wie in Nr. 2, K aus jeder der drei St. Gr. von K zu einem Tripel erster Art; aber so, dass die drei Paare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ gegenseitig in Beziehung zweiter Art stehen; z. B.

$$K = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78, \quad A_1 = 13 \cdot 24 \cdot 57 \cdot 68, \quad A_2 = 14 \cdot 23 \cdot 58 \cdot 67,$$
$$B_1 = 15 \cdot 26 \cdot 16 \cdot 25, \quad B_2 = 37 \cdot 48 \cdot 38 \cdot 47,$$
$$C_1 = 17 \cdot 28 \cdot 36 \cdot 45, \quad C_2 = 18 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 46.$$

In diesem System ist K ausgezeichnet. Es gibt $315 \cdot 6$ derartige Systeme.

b) Man verfährt wie in a), nur dass zwei der drei Paare gegen einander in Beziehung erster Art, gegen das dritte in Beziehung zweiter Art stehen. So erhält man aus dem System a) ein System b), wenn man nur $B_1 B_2$ ersetzt durch

$$B_1 = 15 \cdot 26 \cdot 37 \cdot 48, \qquad B_2 = 16 \cdot 25 \cdot 38 \cdot 47.$$

Auch in diesem System ist K ausgezeichnet, und es gibt 315·18 derartige Systeme.

In a) und b) zusammen hat man die in Math. Ann. 15 angegebenen 315·24 uneigentlichen Systeme.

c) Zu K nimmt man drei Paare erster Art, die aber alle gegenüber K in Beziehung zweiter Art stehen. Dieselben stehen dann auch gegenseitig in Beziehung zweiter Art; so dass K wiederum ausgezeichnet auftritt; z. B.

$$K = 12\cdot34\cdot56\cdot78,\ A_1 = 13\cdot57\cdot26\cdot48,\ A_2 = 15\cdot37\cdot24\cdot68,$$
$$B_1 = 16\cdot38\cdot27\cdot45,\ B_2 = 18\cdot36\cdot25\cdot47,$$
$$C_1 = 14\cdot67\cdot28\cdot35,\ C_2 = 17\cdot46\cdot23\cdot58.$$

Von dieser Art gibt es 315·192 Systeme; und zu ihnen gehört auch das von Hesse, Cr. J. 49, angeführte.

d) Zu K nimmt man ein Paar $A_1 A_2$, das mit K ein Tripel erster Art bildet; ferner $B_1 B_2$, die K gegenüber in Beziehung zweiter Art und gepaart stehen, und welche zugleich mit $A_1 A_2$ in Beziehung 2. Art sind; endlich die $C_1 C_2$, welche noch in Beziehung erster Art (nicht gepaart) zu K stehen; z. B.

$$K = 12\cdot34\cdot56\cdot78,\ A_1 = 13\cdot24\cdot57\cdot68,\ A_2 = 14\cdot23\cdot58\cdot67,$$
$$B_1 = 15\cdot16\cdot35\cdot36,\ B_2 = 25\cdot26\cdot45\cdot46,$$
$$C_1 = 37\cdot38\cdot47\cdot48,\ C_2 = 17\cdot18\cdot27\cdot28.$$

Auch hierbei ist K ausgezeichnet; und es gibt 315·144 derartige Systeme.

e) Zu einem Tripel erster Art $(KA_1A_2)_1$ nimmt man eines der am Anfange von Nr. 2 erwähnten Quadrupel $(B_1B_2\,C_1\,C_2)_1$, das aber nicht, wie dort, zu $(KA_1A_2)_1$ gehört, sondern durchaus mit diesem in Beziehung zweiter Art stehe; wie etwa:

$$K = 12\cdot34\cdot56\cdot78,\ A_1 = 13\cdot24\cdot57\cdot68,\ A_2 = 14\cdot23\cdot58\cdot67,$$
$$B_1 = 15\cdot38\cdot27\cdot46,\ B_2 = 18\cdot35\cdot26\cdot47,$$
$$C_1 = 16\cdot37\cdot28\cdot45,\ C_2 = 17\cdot36\cdot25\cdot48.$$

Jedem Tripel zugeordnet, hat man hier 8 Quadrupel; da in dem System ein Tripel erster Art ausgezeichnet ist, so gibt es 63·15·8 derartige Systeme.

Die bezeichneten Systeme erschöpfen alle existirenden Siebenkegelschnittsysteme, wie man, von dem Zerlegungsschema von K ausgehend, leicht beweist.

Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. O. mit 3 Variabeln.

Von **Eduard v. Weber.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Die Frage nach den gemeinsamen Integralen zweier partieller Differentialgleichungen 2. O. in 3 Variabeln ist von den Herren Valyi[1]) und Bianchi[2]) untersucht worden. Nach einer neuen, sehr einfachen Methode, welche namentlich mehrere der Bianchi'schen Fallunterscheidungen unnöthig macht, leiten wir im Folgenden die Hauptergebnisse der genannten Untersuchungen noch einmal ab, und wenden uns dann zum Studium eines besonderen Falles,[3]) der in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung eine bekannte[4]) wichtige Rolle spielt.

I.

Wir bezeichnen wie üblich mit $p\, q$, $r\, s\, t$, $u\, v\, w\, \bar{\omega}$ bez. die ersten, zweiten, dritten Ableitungen von z nach x und y. Jedes gemeinsame Integral der beiden Gleichungen:

---

[1]) Crelle's J., Bd. 95, p. 99 f.

[2]) Atti d. R. Acc. dei Lincei, Rendiconti (4) II, Nota I p. 218, N. II p. 237, N. III p. 307.

[3]) Bianchi l. c., Nota II.

[4]) Vgl. Darboux, Ann. de l'Ec. Norm. 7, 1870.

$$F(xyzpqrst) = C \tag{1}$$
$$F'(xyzpqrst) = C' \tag{2}$$

wo C, C' willkürliche Constante bezeichnen, befriedigt dann auch ein System Pfaff'scher Gleichungen von der Form:

$$\begin{array}{c} dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{c} dr = u\,dx + v\,dy, \quad ds = v\,dx + w\,dy, \\ dt = w\,dx + \tilde{\omega}\,dy \end{array} \tag{4}$$

worin unter $uvw\tilde{\omega}$ gewisse Functionen von $x \ldots t$ zu verstehen sind, die den Gleichungen

$$M + Ru + Sv + Tw = 0 \tag{5}$$
$$N + Rv + Sw + T\tilde{\omega} = 0 \tag{6}$$
$$M' + R'u + S'v + T'w = 0 \tag{7}$$
$$N' + R'v + S'w + T'\tilde{\omega} = 0 \tag{8}$$

genügen; dabei ist

$$M = X + pZ + rP + sQ; \quad N = Y + qZ + sP + tQ$$
$$M' = X' + \ldots, \quad N' = Y' + \ldots, \quad X = \frac{\partial F}{\partial x} \ldots, \quad T' = \frac{\partial F'}{\partial t}.$$

Sind die Gleichungen (5).. (8) linear unabhängig, hat man aber identisch:

$$\begin{vmatrix} R & S & T & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R' & S' & T' & 0 \\ 0 & R' & S' & T' \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

so existirt augenscheinlich kein gemeinsames holomorphes Integral von (1), (2). Besteht (9) nicht identisch, so sind $u \ldots \tilde{\omega}$ vermöge (5).. (8) als Functionen von $x \ldots t$ bestimmt, und die Bedingungen dafür, dass das System (3), (4) unbeschränkt integrabel sei, lauten

$$D_x(v) - D_y(u) = D_x(w) - D_y(v) = D_x(\tilde{\omega}) - D_y(w) = 0 \tag{10}$$

worin

$$D_x(f) = \Delta_x f + u\frac{\partial f}{\partial r} + v\frac{\partial f}{\partial s} + w\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$D_y(f) = \Delta_y f + v\frac{\partial f}{\partial r} + w\frac{\partial f}{\partial s} + \tilde{\omega}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Delta_x(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\Delta_y(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}$$

gesetzt ist.

Indem man aber (5) mit D_y, (6) mit D_x differentiirt und subtrahirt, erhält man zufolge einfacher Rechnung:

$$R(D_y(u) - D_x(v)) + S(D_y(v) - D_x(w)) + T(D_y(w) - D_x(\tilde{\omega}) = 0. \tag{11}$$

ebenso aus (7) und (8):

$$R'(D_y(u) - D_x(v)) + S'(D_y(v) - D_x(w)) + T'(D_y(w) - D_x(\tilde{\omega})) = 0 \tag{12}$$

sodass die Bedingungen (10) nur mit einer einzigen äquivalent sind. Diese eine Bedingung, welche die 2. Ableitungen von F und F' nach $x \dots t$ linear enthält, ist nothwendig und hinreichend dafür, dass jede der ∞^1 Gleichungen (1) mit jeder der ∞^1 Gleichungen (2) ein Integral mit 4 Constanten gemein habe; dieses Integral ergibt sich durch Integration von (3), (4) unter Berücksichtigung der aus (1), (2) folgenden Anfangsbedingungen. Die willkürliche Annahme von C' liefert dann für jede der Gleichungen (1), die von C für jede Gleichung (2) ein vollständiges Integral.

Verschwinden dagegen alle 4-gliedrigen Determinanten der Matrix von (5) .. (8) identisch, was wir durch

$$\left\| \begin{matrix} M & R & S & T & 0 \\ N & 0 & R & S & T \\ M' & R' & S' & T' & 0 \\ N' & 0 & R' & S' & T' \end{matrix} \right\| = 0 \tag{13}$$

ausdrücken, ohne dass jedoch alle 3-gliedrigen Unterdeterminanten von (9) zu Null werden, so können wir aus (5)..(8) drei der Grössen $u .. \tilde{\omega}$ durch eine unter ihnen, etwa $\tilde{\omega}$, ausdrücken. Die eine, in (10) enthaltene Bedingung stellt dann eine partielle Differentialgleichung I. O. mit der unbekannten Function $\tilde{\omega}$ und den unabhängigen Variabeln $x .. t$ dar; ist deren allgemeines Integral gefunden, so bleibt noch (3), (4) zu integriren; also:

„Das identische Bestehen der Relationen (13) hat zur Folge, dass die Gleichungen (1), (2) ein gemeinsames Integral besitzen, das von einer willkürlichen Function abhängt und durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden kann."

II.

Ehe wir in die genauere Untersuchung des Falles (13) eintreten, schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Zwei Flächenelemente II. O.[1]) $E(x..t)$ und $E'(x+\delta x.. t+\delta t)$ heissen nach Lie vereinigt liegend, wenn sie die Relationen

$$\delta z = p\delta x + q\delta y, \quad \delta p = r\delta x + s\delta y, \quad \delta q = s\delta x + t\delta y \tag{14}$$

befriedigen; eine Serie von ∞^1 Elementen II. O., deren jedes mit einem benachbarten vereinigt liegt, heisst ein Streifen II. O. Eine infinitesimale Transformation $X(f)$ der Elemente

[1]) Vgl. meine Arbeit: Theorie der Flächenelemente des Raumes von 3 Dimensionen, Math. Ann., Bd. 44, p. 458 ff.

$x..t$ des Raumes heisse eine **infinitesimale Streifentransformation**, wenn sie jedes Element in ein benachbartes mit ihm vereinigt liegendes überführt. Definiren wir fortan das Symbol d durch die Identität

$$df = X(f)\,\delta\lambda, \tag{15}$$

so hat man identisch:

$$dz = p\,dx + q\,dy;\; dp = r\,dx + s\,dy;\; dq = s\,dx + t\,dy \tag{16}$$

und $X(f)$ hat die Form

$$X(f) = \xi \Delta_x(f) + \eta \Delta_y(f) + \varrho \frac{\partial f}{\partial r} + \sigma \frac{\partial f}{\partial s} + \tau \frac{\partial f}{\partial t} \tag{17}$$

wo $\xi \eta \varrho \sigma \tau$ Functionen von $x..t$ bedeuten. Die ∞^7 Streifen, welche sich durch Integration der Gleichungen:

$$\begin{aligned} &dx : dy : dz : dp : dq : dr : ds : dt \\ &= \xi : \eta : \xi p + \eta q : \xi r + \eta s : \xi s + \eta t : \varrho : \sigma : \tau \end{aligned} \tag{18}$$

ergeben, sollen die **Bahnstreifen** von $X(f)$ heissen.

Zwei vereinigte Elemente $x..t$ und $x + \delta x .. t + \delta t$ werden durch $X(f)$ in benachbarte Elemente $x + dx..$ und $x + \delta x + d(x + \delta x)\dots$ übergeführt, welche wieder vereinigt liegen, wenn man hat:

$$\left.\begin{aligned} d\delta z &= dp\delta x + dq\delta y + pd\delta x + qd\delta y \\ d\delta p &= dr\delta x + ds\delta y + rd\delta x + sd\delta y \\ d\delta q &= ds\delta x + dt\delta y + sd\delta x + td\delta y \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Subtrahirt man von diesen Gleichungen bez. die folgenden drei:

$$\left.\begin{aligned} d\delta z &= \delta p dx + \delta q dy + pd\delta x + qd\delta y \\ d\delta p &= \delta r dx + \delta s dy + rd\delta x + sd\delta y \\ d\delta q &= \delta s dx + \delta t dy + sd\delta x + td\delta y \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

welche ausdrücken, dass die Elemente $x+\delta x \ldots t+\delta t$ und $x+\delta x+d(x+\delta x) \ldots t+\delta t+d(t+\delta t)$ vereinigt liegen, so folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} dp\,\delta x - \delta p\,dx + dq\,\delta y - \delta q\,dy &= 0 \\ dr\,\delta x - \delta r\,dx + ds\,\delta y - \delta s\,dy &= 0 \\ ds\,\delta x - \delta s\,dx + dt\,\delta y - \delta t\,dy &= 0 \end{aligned}$$

von denen die erste wegen (14), (16) von selbst erfüllt ist. Die andern beiden schreiben wir abkürzend:

$$(d\delta)_1 = 0, \qquad (d\delta)_2 = 0. \tag{21}$$

Da umgekehrt aus (21) wegen (20) die Relationen (19) folgen, so haben wir den Satz:

„Damit die infinitesimale Streifentransformation $X(f)$ 2 benachbarte vereinigt liegende Elemente wieder in solche überführe, ist nothwendig und hinreichend, dass jene Elemente den Bedingungen (21) genügen, wo d durch (15) definirt ist.“

Es erhebt sich nun die Frage: Wie muss $X(f)$ beschaffen sein, damit irgend 2 benachbarte Elemente, die (14), (21) befriedigen, in benachbarte vereinigte Elemente übergeführt werden, die wiederum den Relationen (21) genügen? Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$\begin{aligned} d(d\delta)_1 &= \lambda_1 (d\delta)_1 + \lambda_2 (d\delta)_2 \\ d(d\delta)_2 &= \mu_1 (d\delta)_1 + \mu_2 (d\delta)_2 \end{aligned} \tag{22}$$

unter $\lambda_1 \ldots \mu_2$ unbestimmte Factoren der Grössenordnung $\delta\lambda$ verstanden. Führt man die Differentiationen links mit Rücksicht auf (14), (15) aus, und vergleicht die Coefficienten von δx, δy, δr, δs, δt auf beiden Seiten, so folgt, wenn partielle Differentialquotienten durch untere Indices angedeutet werden:

$$\left.\begin{aligned}
X\varrho + \varrho\Delta_x(\xi) - \xi\Delta_x(\varrho) + \sigma\Delta_x(\eta) - \eta\Delta_x(\sigma) \\
= \lambda_1\varrho + \lambda_2\sigma \\
X\sigma + \varrho\Delta_y(\xi) - \xi\Delta_y(\varrho) + \sigma\Delta_y(\eta) - \eta\Delta_y(\sigma) \\
= \lambda_1\sigma + \lambda_2\tau \\
-X\xi + \varrho\xi_r - \xi\varrho_r + \sigma\eta_r - \eta\sigma_r &= -\lambda_1\xi \\
-X\eta + \varrho\xi_s - \xi\varrho_s + \sigma\eta_s - \eta\sigma_s &= -\lambda_1\eta - \lambda_2\xi \\
\varrho\xi_t - \xi\varrho_t + \sigma\eta_t - \eta\sigma_t &= \qquad -\lambda_2\eta
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned}
X\sigma + \sigma\Delta_x(\xi) - \xi\Delta_x(\sigma) + \tau\Delta_x(\eta) - \eta\Delta_x(\tau) \\
= \mu_1\varrho + \mu_2\sigma \\
X\tau + \sigma\Delta_y(\xi) - \xi\Delta_y(\sigma) + \tau\Delta_y(\eta) - \eta\Delta_y(\tau) \\
= \mu_1\sigma + \mu_2\tau \\
\sigma\xi_r - \xi\sigma_r + \tau\eta_r - \eta\tau_r &= -\mu_1\xi \\
-X\xi + \sigma\xi_s - \xi\sigma_s + \tau\eta_s - \eta\tau_s &= -\mu_1\eta - \mu_2\xi \\
-X\eta + \sigma\xi_t - \xi\sigma_t + \tau\eta_t - \eta\tau_t &= \qquad -\mu_2\eta
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Da es sich augenscheinlich um eine Eigenschaft der Bahnstreifen handelt, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit $\xi = 1$ setzen, wodurch sich obige Formeln etwas vereinfachen.

Genügen die $\xi, \eta, \varrho, \sigma, \tau$ identisch den Relationen, welche durch Elimination von $\lambda_1\,\lambda_2\,\mu_1\,\mu_2$ aus (23) (24) folgen, so hat das Bahnstreifensystem (18) offenbar folgende Eigenschaft:

„Hat man einen beliebigen Streifen S, der den Differentialgleichungen (21) genügt, so bilden die ∞^1 Streifen des Systems (18), welche bez. von den ∞^1 Elementen von S auslaufen, eine Fläche, da ja je 2 aufeinanderfolgende dieser Streifen nach ihrer ganzen Ausdehnung vereinigt liegen."

Wir nennen ein solches System von ∞^7 Streifen „ein unbeschränkt integrables Streifensystem."

III.

Wir setzen in (17) $\xi = 1$, $\eta = \Lambda$, und legen der im Uebrigen beliebigen Streifentransformation $X(f)$ nur die Bedingung auf, dass die 2 totalen Differentialgleichungen (21) eine integrable Combination liefern sollen, d. h. eine Relation der Form:

$$\delta F = \varrho_1 (d\delta)_1 + \varrho_2 (d\delta)_2 \tag{25}$$

erfüllt sei, worin F eine Funktion von $x..t$ bedeutet, und unter Gebrauch der Abkürzungen pag. 102:

$$\delta F = M\delta x + N\delta y + R\delta r + S\delta s + T\delta t$$

gesetzt ist; $\varrho_1\, \varrho_2$ sind unbestimmte Faktoren der Grössenordnung $1:\delta\lambda$.

Indem man in (25) die Coefficienten der willkürlichen Differentiale auf beiden Seiten gleichsetzt und ϱ_1, ϱ_2 eliminirt, folgen die Bedingungen

$$R\Lambda^2 - S\Lambda + T = 0, \tag{26}$$

$$\frac{dy}{dx} = \Lambda, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} R\frac{dr}{dx} + (S - R\Lambda)\frac{ds}{dx} + M = 0 \\ R\frac{ds}{dx} + (S - R\Lambda)\frac{dt}{dx} + N = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dies sind aber zusammen mit

$$\frac{dz}{dx} = p + q\Lambda, \quad \frac{dp}{dx} = r + s\Lambda, \quad \frac{dq}{dx} = s + t\Lambda \tag{27a}$$

nichts anderes als die Charakteristikengleichungen der partiellen Differentialgleichung (1). Da aus (26), (27), (28) umgekehrt (25) folgt, so gilt der Satz:

„Die Bedingung, dass die Gleichungen (21) eine integrable Combination δF zulassen, ist äquivalent mit der andern, dass die Bahnstreifen von $X(f)$ den Charakteristikengleichungen von $F = C$ genügen.“

Die Gleichungen (28) sind völlig äquivalent mit den folgenden:

$$\frac{dr}{dx} = u + v\Lambda, \quad \frac{ds}{dx} = v + w\Lambda, \quad \frac{dt}{dx} = w + \tilde{\omega}\Lambda \quad (29)$$

unter $u \,..\, \tilde{\omega}$ die allgemeinsten Funktionen von $x \,..\, t$ verstanden, die (5), (6) befriedigen; berechnet man nämlich uvw aus (29) und substituirt in (5), (6), so kommen gerade wieder die Gleichungen (28); umgekehrt, sind die letzteren befriedigt, so genügen alle Werthsysteme $uvw\tilde{\omega}$, die (29) erfüllen, auch den Relationen (5), (6).

Des weiteren verlangen wir jetzt, dass die Gleichungen (21) noch eine zweite, von (25) unabhängige integrable Combination zulassen, d. h. dass man ausser (25) noch habe:

$$\delta F' = \varrho_1'(d\delta)_1 + \varrho_2'(d\delta)_2 \quad (30)$$

mit der Bedingung

$$\varrho_1 \varrho_2' - \varrho_2 \varrho_1' \neq 0 \quad (31)$$

Es folgt zunächst, dass die Gleichung

$$R'\Lambda^2 - S'\Lambda + T' = 0 \quad (32)$$

mit (26) eine Wurzel gemein hat, die wir gerade mit Λ bezeichnen wollen; es besteht also (9) identisch. Ferner müssen alle Systeme von Funktionen $u \,..\, \tilde{\omega}$, die (29), mithin nach obiger Bemerkung auch (5), (6) erfüllen, nun auch den Relationen (7), (8) genügen; da die Gleichungen (5) .. (8) somit eine der Grössen $u \,..\, \tilde{\omega}$ ganz willkürlich lassen, müssen überhaupt alle 4-gliedrigen Determinanten (13) verschwinden. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, ohne dass alle 3-gliedrigen

Determinanten von (9) null werden, so kann man aus dreien der Gleichungen (5)..(8), etwa aus (5), (6), (7) die uvw in der Form berechnen:

$$u = k_1 - \Lambda^3 \tilde{\omega}, \; v = k_2 + \Lambda^2 \tilde{\omega}, \; w = k_3 - \Lambda \tilde{\omega} \quad (33)$$

wo Λ die wegen (9) vorhandene gemeinsame Wurzel von (26), (32) bedeutet; man erkennt dies leicht durch Anwendung von Sylvester's dialytischer Eliminationsmethode auf (26), (32). Setzt man jetzt

$$\varrho = k_1 + \Lambda k_2, \quad \sigma = k_2 + \Lambda k_3, \quad \tau = k_3 \quad (34)$$

so genügt das Streifensystem, das durch die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \Lambda, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\Lambda, \quad \frac{dp}{dx} = r + s\Lambda,$$
$$\frac{dq}{dx} = s + t\Lambda, \quad \frac{dr}{dx} = \varrho, \quad \frac{ds}{dx} = \sigma, \quad \frac{dt}{dx} = \tau \quad (35)$$

definirt ist, wegen (34), (33) den Relationen (29), worin jetzt $u \,..\, \tilde{\omega}$ Funktionen von $x \,..\, t$ bedeuten, die sowohl (5), (6), als auch (7), (8) befriedigen. Wir haben somit den Satz:

„Das identische Bestehen der Relationen (13) ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Differentialgleichungen (1), (2) ein System von ∞^7 Charakteristiken miteinander gemein haben; dieses System ist durch (35), (34), (33) eindeutig festgelegt."

Setzt man in (27), (27a), (29) für Λ die zweite Wurzel[1]) Λ_1 von (26), so erhält man die Definitionsgleichungen des zweiten Charakteristikensystems von F. Nennen wir einen Streifen der die Differentialgleichung $\delta F' = 0$ befriedigt, kurz einen Streifen von F', so gilt der Satz:

[1]) Dass die Gleichungen (26), (32) keine verschwindenden Diskriminanten besitzen, ist, wie man leicht sieht, eine nothwendige Voraussetzung für die Gültigkeit obiger Entwickelungen.

„Die Relationen (13) sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass alle charakteristischen Streifen des 2. Systems von F Streifen von F', sowie alle charakt. Streifen des 2. Systems von F' Streifen von F seien.“ Wegen des völligen Reciprocitätsverhältnisses zwischen F und F' genügt es, den ersten Theil der Behauptung zu erweisen.

Wir haben zu zeigen, dass jede der Gleichungen (5), (6) und:

$$M'+\Lambda_1 N'+R'u+(S'+R'\Lambda_1)v+(T'+S'\Lambda_1)w+T'\Lambda_1\tilde{\omega}=0$$

eine Folge der beiden andern ist. Rändert man aber die Matrix dieser 3 Gleichungen mit der Horizontalreihe N', 0, R', S', T', und der Verticalreihe 0, 0, 0, 1, so folgen nach leichter Umformung die Bedingungen:

$$\left\|\begin{array}{cccccr} M & R & S & T & 0 & 0 \\ N & 0 & R & S & T & 0 \\ M' & R' & S' & T' & 0 & -\Lambda_1 \\ N' & 0 & R' & S' & T' & 1 \end{array}\right\| = 0$$

welche, wie leicht ersichtlich, mit (13) völlig äquivalent sind, w. z. b. w.

Wir behaupten nun:

„Das gemeinsame Charakteristikensystem (35) von (1), (2) ist ein unbeschränkt integrables Streifensystem.“

Es genügt zunächst den beiden Identitäten (25), (30); ersetzt man darin die δx.. durch die dx.., so folgt:

$$dF = 0, \qquad dF' = 0 \tag{36}$$

Differentiirt man jetzt (25), (30) mit dem Symbol d und beachtet die für jedes f geltende, leicht zu verificirende Identität

$$d(\delta f)-\delta(df)=\frac{\partial f}{\partial p}(d\delta)_1+\frac{\partial f}{\partial q}(d\delta)_2,$$

so folgt wegen (36):

$$\varrho_1 d(d\delta)_1 + \varrho_2 d(d\delta)_2 + (d\varrho_1 - P)(d\delta)_1 + (d\varrho_2 - Q)(d\delta_2) = 0$$
$$\varrho_1' d(d\delta)_1 + \varrho_2' d(d\delta)_2 + (d\varrho_1' - P')(d\delta)_1 + (d\varrho_2' - Q')(d\delta)_2 = 0$$

woraus sich wegen (31) zwei Identitäten der Form (22) ergeben, w. z. b. w. Die gemeinsamen Integralflächen von (1), (2) werden demnach durch folgenden Process erhalten:

„Man bestimme einen Streifen II. O. S, der den Differentialgleichungen (14), (21) genügt, worin die d durch (35) definirt sind, oder auch (was wegen (25), (30), (31), auf dasselbe herauskommt) irgend einen gemeinsamen Streifen von F und F'; sodann durch Integration von (35) die ∞^1 Streifen, welche bez. von den einzelnen Elementen von S auslaufen und durch sie bez. eindeutig festgelegt sind. Diese ∞^1 Streifen ordnen sich dann zu einer gemeinsamen Integralfläche von (1), (2) zusammen."

Wir können für den Ausgangsstreifen S y und z als willkürliche Funktionen von x annehmen, ferner in einem beliebigen Punkte der so definirten Raumcurve ein Werthsystem p, q, das die Relation $dz = p\,dx + q\,dy$ befriedigt, was ∞^1 Möglichkeiten bietet; endlich können wir noch für $s\,t$ beliebige Anfangswerthe festsetzen, wodurch dann auch der Anfangswerth von r bestimmt und vermöge (14), (21) der Raumcurve entlang ein Streifen festgelegt ist. Also:

„Bestehen die Relationen (13), so gehen durch jede Raumcurve ∞^3 Integralflächen von (1), (2) hindurch."

Soll eine Integralfläche von (1) auch (2) befriedigen, so müssen die auf ihr verlaufenden ∞^3 Streifen des 1. Charakteristikensystems von (1) der Gleichung

$$dF' = 0 \tag{37}$$

genügen; da aber das System der Relationen (27), (27a),

(28), (37) augenscheinlich auf (35) zurückführt, so schliesst man leicht, dass durch unsere Methode alle gemeinsamen Integrale von (1), (2) geliefert werden.

Das Bemerkenswerthe dieser Methode besteht darin, dass sie ein vollkommenes Analogon zu der von Lagrange, Charpit, Monge begründeten, von Lie geometrisch präcisirten Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen I. O. darstellt. In der That lässt sich auch ein grosser Theil der an die genannte Methode sich anschliessenden geometrischen Sätze auf unsern Fall übertragen, was indes hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Worauf es uns hier vor Allem ankam, war, den Begriff des unbeschränkt integrabeln Streifensystems aufzustellen und an einem besonders einfachen Falle zu erläutern.

Ueber Blei- und Fahlerz-Gänge in der Gegend von Weilmünster und Runkel in Nassau.[1])

Von **F. v. Sandberger.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Die fragliche Gegend gehört zu der dem nordwestlichen Abhange des Taunusgebirges vorgelagerten Hügellandschaft, welche vielfache Gesteinswechsel bemerken lässt. Dachschiefer der oberen Abtheilung des Unterdevons (Orthoceras-Schiefer) sind an vielen Orten entwickelt und werden bei Langhecke seit Jahrhunderten abgebaut. Nur zuweilen, z. B. bei Lützendorf nächst Weilmünster, Eufingen und Niederselters enthalten sie Leitversteinerungen (*Orthoceras triangulare* und *commutatum, Goniatites compressus* u. a.), die freilich auch auf grossen Strecken fehlen. Graugrüne ganz in Schalstein umgewandelte Diabastuffe sind ebenfalls sehr häufig und ebenso wie eruptive dichte Diabase für das Vorkommen der Erze von hervorragender Bedeutung.

Eine grosse Anzahl von aufgelassenen Gruben, sowie einige noch im Gange befindliche sind in diesen Gesteinen unter eigenthümlichen Verhältnissen betrieben, wie Verfasser z. Th. noch selbst gesehen hat. Dieselben liegen fast sämmtlich in einem von NO nach SW von Weilmünster bis Weyer

[1]) Behufs der geographischen Orientirung empfiehlt sich die der Beschreibung des Bergreviers Weilburg von Fr. Wenckenbach, Bonn 1879, beigefügte Uebersichtskarte.

verlaufenden Zuge. Am besten beobachtet wurde das Vorkommen von Weyer bei Runkel,[1]) welches längere Zeit von dem um den nassauischen Bergbau hochverdienten Geh. Bergrath Fr. Odernheimer geleitet und erst 1846 aufgelassen wurde. Die Schichten streichen hier h. 4—5, die drei Gänge aber h. 7—9, jenseits h. 9 hörte die Erzführung auf. Die Erze waren grossblättriger Bleiglanz mit geringem und Fahlerz mit höherem Silbergehalte. Als Gangarten traten Braunspath und Quarz auf, an letzteren waren die Erze gebunden. Bleiglanz fand sich hauptsächlich, wo der Thonschiefer an dichten Diabas anstiess, Fahlerz dagegen, wo er mit aufgelockertem Schalsteine wechselte, seltener kamen beide Erze gemengt vor. In der Teufe legten sich die Schichten ganz flach und der Diabas wurde immer mächtiger und dichter, während die Gangspalte ganz zusammengedrückt und nur als Besteg erschien. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass der in höherer Teufe vorgefundene Diabas nur Ausläufer eines Stockes in der Teufe darstellte, welcher noch keine Auslaugung erfahren hatte und daher auch keine Erze liefern konnte. Was ich in der letzten Zeit des Betriebs (1840) selbst auf der Grube Mehlbach gesehen habe, stimmt ganz mit Odernheimer's Bericht über Weyer überein, auch hier erschien der damals betriebene Erzgang in dichtem Diabase, dessen Klüfte zuweilen mit Verwachsungen von blauem Asbest und Kalkspath ausgefüllt waren, völlig zerdrückt und nur als Besteg. Es unterliegt also keinem Zweifel, dass beidemale die Aufreissung der Gangspalte in dem überaus zähen Diabase aus mechanischen Gründen unmöglich war und selbstverständlich auch eine Injection der Mineralien der Erzgänge von unten im Sinne der damals noch allgemein angenommenen Erzgang-Theorie ganz unzulässig erscheint.

---

[1]) Odernheimer in s. Zeitschr. Das Berg- und Hüttenwesen im Herzogthum Nassau. I. S. 90 f.

Durchaus analog verhalten sich die Fahlerz führenden Gänge der Gruben Eduard und Alter Mann bei Langhecke, Goldkante bei Weinbach, vielleicht auch der Grube Laubus bei Haintchen.

Die Grube Alter Mann resp. die zu ihr gehörende Grube Rothenküppel bietet das einzige mir bekannte Beispiel von höflichem, d. h. mit Erzen imprägnirtem Nebengestein. Der Schalstein im Hangenden des Bleiglanzganges enthält nämlich eingesprengte und angeflogene Kupfererze, besonders Kupferlasur[1]) in Menge; doch kommen auch kleine Partien vor, welche ganz den Habitus von aus Fahlerz entstandenem Ziegelerz besitzen, wie ich s. Z. selbst gesehen habe.

Die Mineralien der Gänge zeigen keine bestimmte Reihenfolge, besonders der Braunspath, welcher in der Regel unter, aber wie auch anderwärts stellenweise auch über dem Quarze erscheint. Im Ganzen kommen folgende vor:

1. **Braunspath** in schwachgekrümmten Rhomboëdern von 2,94 spec. Gew. oder derben Massen, im frischen Zustande von rein weisser Farbe. Auf den Halden geht die Farbe sehr bald in das Gelbliche und schliesslich Tiefbraun über, weil Eisen- und Manganoxydul in höhere Oxydationsstufen umgewandelt werden. Nach dem spec. Gew. würde der Braunspath Breithaupt's Tautoklin zunächst stehen.

2. **Kalkspath** findet sich sparsam in kleinen wasserhellen Krystallen R^3. R über dem Braunspath. Ich bin sehr geneigt, ihn für ein Zersetzungsprodukt des letzteren anzusehen, welches bei der Oxydation der übrigen Bestandtheile abgeschieden worden ist.

3. **Quarz.** Ist einer der wichtigsten Bestandtheile der Gänge und findet sich entweder derb und von grauweisser

---

1) Wenckenbach, Jahrb. d. nass. Vereins für Naturkunde. XXXI u. XXXII. S. 100.



Farbe oder in farblosen kleinen Krystallgruppen $\infty R. + R$, welche nicht selten krystallisirtes Fahlerz umschliessen.

4. **Fahlerz** häufig krystallisirt in den Formen $\frac{O}{2} \cdot \frac{2O2}{2} \cdot \infty O$, wozu selten noch $- \frac{2O2}{2}$ hinzukommt, oder derb. Das Mineral von 4,82 spec. Gewicht ist stahlgrau mit rein schwarzem Strich. Es gibt vor dem Löthrohre sehr deutliche Reactionen auf Antimon, Arsen und schwache auf Wismuth; Kobalt ist in demselben nicht enthalten, sondern nur Kupfer, Eisen, Zink und wechselnde Quantitäten von Silber, welche zuweilen bis zu 1 proc. steigen. Es handelt sich daher um ein Antimon-Arsen-Fahlerz, welches den Vorkommen von Müsen bei Siegen und Brixlegg zunächst stehen dürfte. Wie ersteres zeigt es auch zuweilen einen dünnen Ueberzug von Kupferkies, über dessen Bedeutung ich mich wiederholt ausgesprochen habe.[1]) Von den Producten der Oxydation des Fahlerzes wird später die Rede sein.

5. **Antimonsilberblende** (dunkles Rothgültigerz). Krystalle dieses stets über Fahlerz auftretenden Erzes sind sehr selten, doch fand ich deutliche Säulenflächen an Stücken von Grube Mehlbach, aber die Enden waren nicht gut ausgebildet. Derbes Rothgültigerz ist in früheren Jahrhunderten offenbar auf mehreren Gruben getroffen worden. So berichtet Wenckenbach[2]) nach den Acten über eine $2^1/_2$ Centner schwere Masse, welche um 1600 auf der Grube Altermann bei Langhecke eingebrochen ist. Von Weyer wird kein Rothgültigerz erwähnt.

6. **Bleiglanz.** Das Mineral ist auf allen Gängen und zwar in grossblättrigen Aggregaten vorgekommen, aber in grösserer Menge nur zu Weyer am Contacte von Thonschiefer

[1]) Untersuchungen über Erzgänge. II. S. 289 f.

[2]) Jahrb. d. nass. Vereins f. Naturkunde. XXXI. u. XXXII. S. 196.

mit dichtem Diabas, sowie in faustgrossen Knollen in Braunspath eingewachsen auf der Grube Goldkante bei Weinbach unweit Weilburg; auf der Grube Mehlbach hat er nur eine untergeordnete Rolle gespielt. Krystalle sind mir nicht zu Gesicht gekommen. Der Silbergehalt ist gering, nur 1 Loth im Centner.

7. **Kupferkies.** In geringer Menge derb und zuweilen in verzerrten quadratischen Sphenoiden krystallisirt auf Quarz, sowie sehr selten als dünner Ueberzug auf Fahlerzkrystallen auf Grube Mehlbach. Eine bergmännische Wichtigkeit hat er nicht besessen.

Zersetzungs-Producte.

a) von Fahlerz.

8. **Gelbeisenerz.** Wie an vielen anderen Orten beginnt auch an den Fahlerzen der hier besprochenen Erzgänge die Zersetzung mit der Bildung einer Menge von Klüftchen, in welchen schwefelsaures Eisenoxydul und Kupferoxydul enthalten ist und durch destillirtes Wasser ausgezogen werden kann. Das Erz geht dann in eine matte schmutziggrüne Masse und schliesslich in eine ockergelb gefärbte erdige Substanz über, welche weder Kupferoxyd, noch Arsen oder Antimon enthält, wohl aber Eisenoxyd und viel Wasser, daher als Gelbeisenerz bezeichnet werden muss. Es ist der letzte Rest des Erzes, aus welchem auch Arsen und Antimon durch alkalische Gewässer ausgelaugt worden sein müssen; Ziegelerz kommt nicht vor.

9. **Kupferschaum** in blätterigen Partien bedeckt zuweilen die eben erwähnte graugrüne Schicht des Fahlerzes, ist aber bisher nur auf der Grube Mehlbach als Seltenheit gefunden worden.

10. **Thrombolith.** Aus dem Gemenge mit arsensaurem Kupferoxyd scheidet sich stellenweise ein mattgrünes, halb-

erdiges Mineral aus, welches aus Kupferoxyd, Antimonsäure und Wasser mit wenig Eisenoxyd besteht und ganz mit dem Thrombolith von Rezbanya übereinstimmt.

11. **Kupferlasur.** Ueberdeckt die gelbe Zersetzungsschicht in kugeligen und traubigen Aggregaten, die zuweilen in deutliche Krystalle $\infty \mathrm{P} \infty \cdot 0 \mathrm{P} \cdot - \mathrm{P} \cdot \infty \mathrm{P}$ auslaufen. Besonders schön von Grube Eduard bei Langhecke.

12. **Malachit** in kleintraubigen Aggregaten findet sich in geringerer Menge zwischen und über der Kupferlasur und muss als jünger wie diese gelten. Die kohlensauren Kupferoxyde sind daher sehr spät, vermuthlich durch Zersetzung des Vitriols durch kohlensauren Kalk des Braunspaths ausgefällt worden.

13. **Kupfermanganerz** von schwarzer Farbe und braunem Strich tritt ebenfalls in kleintraubiger Form als jüngstes Kupfererz über den bisher erwähnten Mineralien auf, genau so wie bei Saalfeld, Kamsdorf und Freudenstadt.

b) von Bleiglanz.

14. **Weissbleierz.** Ist auf Grube Mehlbach in kleinen bündelartig zusammengehäuften Aggregaten in geringer Menge gefunden worden.

15. **Grünbleierz.** In dünnen grünen Ueberzügen auf Quarz gleichfalls auf Grube Mehlbach.

16. **Mennige** in deutlichen Pseudomorphosen nach Weissbleierz, welche in zerfressenem Quarze eingewachsen waren. Ich habe diese merkwürdige und seltene Pseudomorphose schon 1845[1]) bekannt gemacht, mich aber einer Erklärung derselben enthalten. Auch jetzt bin ich noch nicht zu einer solchen gelangt, da ich mich den von Blum[2]) gegen eine

---

[1]) Jahrb. f. Min. 1845. S. 577.

[2]) I. Nachtrag zu den Pseudomorphosen. S. 92.

Entstehung derselben durch Einwirkung von Hitze vorgebrachten Bedenken nicht verschliessen kann. Dass in uralter Zeit einmal Betrieb durch Feuersetzen stattgefunden haben könnte, ist ja nicht zu leugnen, aber eine so schöne Erhaltung der Form nur denkbar, wenn die Wärme allmählich auf das von Quarz umschlossene Weissbleierz eingewirkt hätte. Leider besitze ich das Belegstück nicht mehr. Solche von anderen Fundorten, die ich untersucht habe, zeigen keine Erscheinungen, welche auf Einwirkung hoher Temperatur deuten.

Wenn man sich die Art der Ausfüllung der Gänge klar zu machen sucht, so ist es vor Allem nöthig, die Bestandtheile der Nebengesteine in Betracht zu ziehen.

In erster Linie sind die Schalsteine näher zu charakterisiren. Von diesen liegt zwar eine Anzahl von Analysen von Neubauer und Dollfus[1]) vor, wobei aber nur die bei gewöhnlichen quantitativen Analysen übliche Menge von 1—1½ g untersucht wurde; Schwermetalle, Antimon und Arsen sind in diesen gewöhnlich nicht berücksichtigt. Allein das constante Auftreten von Beschlägen secundärer Kupfererze in den Schalsteinen und das Gebundensein der Kupferkiesgänge an sie hatte mich schon 1852[2]) veranlasst, den Kupfergehalt des Nebengesteins als Quelle dieser metallischen Ausscheidungen zu bezeichnen. Dieser ist nun durch Analysen mit 10—12 g Substanz unzweifelhaft nachgewiesen worden, aber daneben auch in einigen ein solcher von Antimon, Arsen und Zink, d. h. sämmtliche Bestandtheile des Kupferkieses und des Fahlerzes. Um auf Silber zu prüfen, hätte noch eine weit grössere Menge Schalstein in Arbeit genommen werden müssen, da es auch in den Fahlerzen nur in geringer Menge auftritt. Trotzdem ist aber

---

1) Jahrb. d. nass. Vereins f. Naturkunde. X. S. 49 ff.
2) Jahrb. d. nass. Vereins f. Naturkunde. VIII. S. 6.

sein Vorkommen nicht zweifelhaft und seine locale Concentration zu Rothgültigerz augenfällig. Dass das Fahlerz in den Gängen an Schalstein als Nebengestein gebunden war, ergibt sich aus obigen Bemerkungen als nothwendig. Das zur Umwandlung der Oxyde in Schwefelmetalle nöthige schwefelsaure Natron fehlt in keinem Schalstein und organische Substanz ist ja in allen vorhanden, welche einigermassen zersetzt erscheinen.

Anders verhält sich der Bleiglanz, welcher vorzugsweise da einbrach, wo Thonschiefer das Nebengestein bildete. Es erscheint auffallend, dass die Schalsteine kein Blei enthalten, während dasselbe doch in Kalkspathklüftchen jüngerer Diabase z. B. in der Gegend von Weilburg und Diez häufig genug als Bleiglanz in Begleitung von Zinkblende und Kupferkies beobachtet wird, aber die Thatsache bleibt desshalb doch bestehen. Dagegen ist Blei in den Orthocerasschiefern und auch älteren (Rhipidophyllen-)Schiefern der Lahngegend sehr verbreitet, während Kupfer in diesen nur untergeordnet auftritt. Es wird das wohl der Grund sein, warum Bleiglanz vorzugsweise in den Gangklüften zwischen Thonschiefer und dichtem Diabase auftrat und nur ausnahmsweise mit Fahlerz zusammen vorkam.

Betrachtet man ferner die Gangarten, so lässt sich im Allgemeinen behaupten, dass Braunspath schon in einer frühen Periode der Auslaugung des Nebengesteins reichlich gebildet wurde, da er schon als solcher in dem Schalstein vorhanden war, während Quarz erst bei sehr starkem Angriffe des Nebengesteins aus dessen Silicaten abgeschieden werden konnte, wobei auch die schwermetallischen Bestandtheile desselben in Freiheit gesetzt und auf bekannte Weise in Schwefelmetalle umgesetzt wurden. Dass dieselben in der Regel erst mit dem Quarze auf der Gangspalte erscheinen, ist also sehr erklärlich.

Vergleicht man andere Gänge, so erscheint das hier

geschilderte Vorkommen gewissermassen als eine Miniaturausgabe der an Diabas mit silberhaltigem Augit (0,001 Silber) gebundenen weltberühmten Gänge von Andreasberg am Harze; auch mit Přibram bestehen gewisse Analogien. Entfernter sind schon diejenigen mit dem Wolfacher Wenzelgange, da zwar die Art der Ausfüllung, nicht aber auch die Lagerungsverhältnisse mit den nassauischen Uebereinstimmung bemerken lassen.

Die Ausbeute war im vorigen Jahrhundert nicht unbeträchtlich und vermuthlich durch häufige Einbrüche von Rothgültigerz bedingt, die aktenmässig festgestellt sind; von der Grube Mehlbach gibt es auch eine hübsche Ausbeutemünze mit dem Bilde des damaligen Regenten, Fürsten Carl August von Nassau-Weilburg. Gegenwärtig würde eine Wiederaufnahme des Bergbaues angesichts des ungünstigen Verhaltens der Gänge in der Teufe und des tiefgesunkenen Preises des Silbers keine Aussicht auf Erfolg haben.

Ueber Leucocytenwanderung in den Schleimhäuten des Darmkanales.

(Mit 17 Figuren auf Taf. I u. II.)

Von N. Rüdinger.

(*Eingelaufen 6. April.*)

I. Umwandlung der Lieberkühn'schen Drüsen durch Leucocyten beim Hunde.

In meinem Aufsatz über die Umbildung der Lieberkühnschen Drüsen beim Menschen[1]) habe ich zu zeigen versucht, dass überall dort in der Darmschleimhaut, wo Leucocytenfollikel vorhanden sind, die Lieberkühn'schen Drüsen vollständig fehlen. Ich suchte zu zeigen, dass die Follikel der Darmschleimhaut, indem dieselben aus der Tunica propria mucosae, sich vergrössernd, vorrücken, die Lieberkühn'schen Drüsen derart umwandeln, dass aus den Cylinderepithelien der Drüsen Rundzellen werden, die sich von den Leucocyten nur äusserst schwer unterscheiden lassen.

Diesem Vorgang, der sich in dem Dünn- und Dickdarm des Menschen, insbesondere in dessen Wurmfortsatz unausgesetzt vollzieht, konnte erst dann eine Bedeutung zugesprochen werden, wenn ein ähnliches Verhalten zwischen

[1]) Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der K. b. Akademie der Wiss. 1891, Bd. XXI.

den Leucocyten und den Lieberkühn'schen Drüsen auch bei den Thieren nachgewiesen ist.

In meinen Figuren 12 und 13 habe ich dieselben Veränderungen, die sich in der Schleimhaut des Darmes beim Menschen vorfinden, in genauer Copie vom Hundedarm zur Darstellung gebracht.

An der Abbildung (Fig. 12) zeigte ich im Hundedarm, und zwar im Wurmfortsatz, eine Schleimhautbucht mit normal besetzten Cylinderepithelien an der freien Oberfläche (Fig. 12, Zahl 1.) An die Epithelien der Bucht grenzt ein Leucocytenhaufen an, der bis zur Cylinderepithellage vorgerückt ist (2). Während zu beiden Seiten der Wanderzellengruppe viele normale Lieberkühn'sche Drüsen auf dem Quer- oder Schiefschnitt getroffen sind, sieht man in dem Leucocytenhaufen nur vier Lieberkühn'sche Drüsen, welche kein normales Aussehen darbieten. Dieselben sind vergrössert, weil ihr Zellenmaterial in Unordnung gerathen ist. Die Cylinderzellen sind theilweise gelockert und ihre Kerne liegen nicht mehr in einer Reihe, sondern sie sind unregelmässig angeordnet (Fig. 12, Zahl 5, 6 und 7).

Dass die Wanderzellen schon in der Nähe durch die Darmschleimhaut durchgedrungen sind, erkennt man an jener Masse, welche bei der Zahl 8 und 9 angegeben ist. Dieselbe zeigt bedeutende Verkleinerungen und Zerfall der lymphoiden Zellen.

Von einer anderen Stelle des Hundedarmes wurde die Fig. 13 gewonnen. Die Leucocyten dringen ebenfalls gegen die Darmschleimhaut vor, und nachdem dieselben die Lieberkühn'schen Drüsen erreicht haben, beginnt durch das Eindringen derselben zwischen die Cylinderepithelien der Drüsen zunächst die Lockerung. Die Kittsubstanz löst sich und die Epithelcylinder werden zu Rundzellen.

Während an der Schleimhautseite bei der Zahl 1 und 2 die Cylinderzellen noch geordnet neben einander stehen,

zeigen sich die gegenüberstehenden Gruppen schon so verändert, dass dieselben kaum mehr als Cylinderepithelzellen erkannt werden. Bei der Zahl 3 sind fast alle Epithelien so formell umgeändert, dass dieselben einen ovalen Kranz von mehr oder weniger vollständig umgewandelten Rundzellen darstellen. Man darf wohl sagen, dieselben haben Leucocyten-Eigenschaften angenommen. Bei der Zahl 2 ist die Tunica propria der Drüsen mit ihren Kernen im halben Umkreise noch erhalten, während die übrigen beiden Drüsen fast vollständig ihren normalen Charakter verloren haben.

Die ganze übrige Umgebung ist von Leucocyten durchsetzt und bei einem Vergleich dieser mit den Rundzellen, die aus den Epithelzellen hervorgegangen sind, besteht der wesentliche Unterschied darin, dass die Kerne der Rundzellen viel grösser sind als jene der Leucocyten, ein Verhalten, das ganz gut in der Abbildung zum Ausdruck kommt. Ein weiterer Unterschied besteht auch noch darin, dass die Kerne der Leucocyten etwas intensiver gefärbt erscheinen, als jene der Epithelzellen, insbesondere dann, wenn man blaue Farbstoffe anwendet.

Auf Grund der Studien an einer grösseren Collection von Darmpräparaten vom Hunde kam ich zu der Ueberzeugung, dass die Umwandlungen der Lieberkühnschen Drüsen durch Leucocyten-Einwanderungen sich beim Hunde ebenso vollziehen, wie es für den Menschen schon früher von mir beschrieben wurde, insbesondere, wenn ein grosser und reifer Follikel sich den Drüsen nähert.

Ich will zur Zeit nicht den Satz aussprechen, dass die Cylinderzellen der Lieberkühn'schen Drüsen direkt zu Leucocyten umgewandelt werden. Diese Anschauung würde ja gegen die herrschende Schulmeinung gerichtet sein, und doch wage ich zu behaupten, dass zwischen den Leucocyten in der Darmschleimhaut und den aus den Zellen der

Lieberkühn'schen Drüsen entstandenen Rundzellen kein wesentlicher formeller Unterschied besteht.

W. Flemming[1]) sagt: „Wenn Wanderzellen ebenso aussehen, sich ebenso bewegen, ebenso wechselnde und polymorphe Kernformen und wechselnden Kerninhalt zeigen, wie ausgewanderte Blutleucocyten oder Lymphzellen, wie will man dann beide noch auseinander halten?"

Ohne mich hier in die vielumstrittene Frage über die verschiedenen Arten von Leucocyten näher einzulassen, kann ich doch nicht umhin, auf die beschriebenen Beziehungen zwischen den wandernden Leucocyten der Darmschleimhaut und dem Epithel der Lieberkühn'schen Drüsen wiederholt hinzuweisen, weil ich an der Anschauung festhalte, dass im Darm bedeutungsvolle Vorgänge sich abspielen, die noch weitere Studien erforderlich machen.

II. Durchwanderung der Leucocyten nach den Gallenwegen.

Soweit ich die Literatur kenne, sind in der Schleimhaut der Gallenblase Durchwanderungen von Leucocyten noch nicht beobachtet worden.

Ich konnte von einem Enthaupteten eine normale Gallenblase einlegen und ihre Erhärtung gelang sehr gut. Zunächst soll die eigenartige Beschaffenheit der Schleimhaut der Gallenblase eine kurze Erörterung finden. Mir schien es von Werth zu sein, dass man die geöffnete Gallenblase sofort in Sublimat oder in eine andere erhärtende Flüssigkeit bringt, damit so viel als möglich das Secret mit der Schleimhautfläche in Berührung bleibt. Die Schnitte zeigen dann stellenweise den Secretbeleg in unversehrtem Zustande. Da ich mich an keine gute Abbildung von einem Querschnitt

---

[1]) Archiv für mikroskopische Anatomie, Jahrgang 1891, S. 261.

der Gallenblasenwand erinnere, so habe ich einen solchen (s. Fig. 14) abbilden lassen. Jedermann kennt die zierlichen Schleimhautfalten der Gallenblase, welche unter Flüssigkeit mit Hilfe schwacher Vergrösserungen schon klar übersehen werden. Zunächst erkennt man die der Längsachse der Blase entsprechend angeordneten etwas grösseren Längsfalten, welche durch quer oder schief gestellte Falten mit einander verbunden sind. So entstehen die vieleckigen Felder, in welchen kleinere secundäre Falten in verschiedener Grösse und Richtung sich erheben. An der Abbildung (Fig. 14) erkennt man die höher vorspringenden Falten und dazwischen die kleineren secundären einfachen oder auch die verzweigten Erhebungen, die sich dadurch auszeichnen, dass die Bindesubstanz zwischen je zwei Epithelreihen einer Falte äusserst spärlich ist. Alle Anordnungen sprechen dafür, dass die gitterartige Faltenbildung darauf berechnet ist, möglichst grosse Epithelflächen zu Stande zu bringen mit sehr wenig Bindegewebe zwischen denselben, in welchem nur Raum für Blut- und Lymphgefässe und insbesondere für wandernde Leucocyten vorhanden ist. Auch in den grösseren Gallengängen und in den Buchten derselben tritt ebenso, wie in der Gallenblase, ein hohes Cylinderepithel auf. Weder am Körper noch am Fundus der Gallenblase finden sich Schleimdrüsen vor.

Da sich meine Besprechung nur auf das Epithel und die Durchwanderung der Leucocyten in demselben beziehen soll, so will ich nicht näher auf die specielle Gewebsbetrachtung der Gallenwege eingehen.

In der Fig. 17 erscheint das Epithel an dem oberen Ende der Abbildung einschichtig, abwärts an derselben mehrschichtig. Ich halte die letztere Stelle für das Ergebniss eines Schiefschnittes, an welchem mehrere Zellen auf der Schnittfläche getroffen sind, während alle die reinen Querschnitte nur ein einschichtiges Epithel zeigen.

Die Leucocytendurchwanderung findet an allen von der Gallenblase gewonnenen Präparaten statt. Die lymphoiden Zellen bewegen sich, eingebettet in den schmalen Falten zwischen den Epithelien, in jener spärlichen Bindesubstanz, welche diese Epithellagen mit einander vereinigt. Dass man an den Falten der Gallenblasenschleimhaut nicht von einer Schleimhaut im Sinne der Darmschleimhaut sprechen darf, wird sofort an jedem Schnitt erkannt. Schwer lässt sich feststellen, ob das Cylinderepithel auf einer Basalmembran aufgepflanzt ist, ähnlich wie im Darmrohr. Eine Begrenzung des Epithels durch eine Basalmembran ist wahrscheinlich vorhanden; allein mit Bestimmtheit konnte ich dieselben nicht constatiren. Man sieht an einzelnen Stellen hie und da Grenzlinien an der Aussenseite der Epithelzellen, jedoch von einer scharf begrenzten Basalmembran konnte ich mich nicht überzeugen. Die etwas konische, kleiner werdende Beschaffenheit der Cylinderzellen an der Aussenseite, wo der gegenseitige Contact der Epithelzellen fehlt, ist wohl der wesentliche Grund, dass man über die Basalmembran nicht leicht Aufschluss gewinnen kann.

Die Leucocyten im Epithel.

Ueber die Art der Durchwanderung der Leucocyten bedarf es nur weniger Angaben. Man findet die Leucocyten ganz vereinzelt, oft zu zweien hinter einander oder zwei Zellen, welche nur durch eine oder zwei Epithelzellen von einander getrennt werden, durchwandernd. Stellenweise begegnet man ganzen Gruppen und ich konnte in einem Falle 6 und in einem andern annähernd 25 Wanderzellen zählen. Grössere Zerstörungen der Cylinderepithelschichte kommen nicht zur Beobachtung. Massenweises Durchtreten der Leucocyten, wie etwa im Darmrohr, kommt in der Gallenblase nicht vor und wie dieselben in dem grossen Schleimhaut-

gebiet isolirt wandern, so treten sie auch meist vereinzelt zwischen den Cylinderepithelien durch.

Die Art und Weise des Durchtrittes geschieht in Form von stiftartigen Gebilden, die sich langgestreckt zuspitzen und an ihrem der Blasenhöhle zugekehrten Ende eine Verlängerung zeigen, welche als feinkörnige Masse die Epithelien auseinanderdrängt.

Unzweifelhaft stellt dieser langgestreckte Fortsatz des rundlich langen Kerns, der sich durch seine dunkle Färbung auszeichnet, die Zellenmembran und das Protoplasma des Leucocyten dar, die dem Kern ebenfalls in Stiftform vorauseilen und die Epithelzellen auseinander drängen.

Ist ein Leucocyt zwischen die Cylinderzellen eingedrungen, so benützt ein zweiter oder mehrere den jetzt präformirten Spaltraum und rücken nach, so dass man auch zwei und mehrere hintereinander gelagert beobachten kann.

Sind die Leucocyten an den inneren Enden der Epithelzellen angekommen, so drängt sich ihre Zellmembran mit dem Protoplasma als bläschenförmiges Gebilde nach dem Blasenraum vor und man kann beide gut übersehen. Der Kern ist in diesem Falle noch nicht ganz durchgetreten, sowie derselbe aber seinen engen Kanal zwischen den Cylinderzellen verlassen hat, nimmt er sofort die ursprüngliche runde Form an und man wird in dieser Hinsicht an die Kernveränderungen erinnert, welche die Blutkörperchen in engen Passagen erfahren, indem diese ebenfalls, nach dem Durchgang durch enge Kanäle, ihre normale plattrunde Form wieder annehmen. Wenn auch der Kern eines Leucocyten gross, das Protoplasma gering ist und die Zellenmembran zuweilen nur einen geringen Abstand vom Kern zeigt, so muss man doch ihre Fähigkeit, die Form zu ändern, bewundern.

Haben die Wanderzellen ihren Durchgang zwischen den Cylinderzellen vollbracht, so trifft man dieselben in einem

Secret von gleichmässiger gelber Färbung, in dem sich nur die Leucocyten als geformte Elemente vorfinden. In grösserer Entfernung von der Schleimhaut begegnet man den Wanderzellen nicht mehr und ich habe vielfache Gründe, anzunehmen, dass dieselben sich vollständig auflösen, so dass man zuweilen noch zerfallenen Bruchstücken der Kerne begegnet. Schliesslich sieht man im Secret der Gallenblase eine gleichmässig homogene Masse, in der gar keine geformten Elemente mehr vorhanden sind.

Nachdem man eine massenhafte Einwanderung der Leucocyten in die Gallenblase beobachtet hat, in der Nähe der Schleimhaut dieselbe vorfindet, dann aber in dem amorphen Secret keinen Zellen mehr begegnet, so ist man wohl berechtigt, aus diesen Thatsachen den Schluss zu ziehen, dass alle in die Gallenblase eingewanderten Leucocyten sich vollständig auflösen und von hier an nur durch die ihnen eigenthümlichen chemischen Stoffe zur Wirkung gelangen.

Zieht man die Grösse der Oberfläche der Gallenblase und die zahllosen Mengen der Leucocyten in Betracht, welche einwandern, so muss die Secretmenge, wenn ich mich so ausdrücken darf, welche durch sie entsteht, als eine sehr bedeutende bezeichnet werden. Kann man die Leucocyteneinwanderung in die Gallenblase als einen constanten normalen Vorgang ansehen, so darf die Gallenblase nicht mehr als ein einfaches Reservoir für die Galle, sondern als ein bedeutungsvoller secretorischer Apparat, der die Leucocyten zur Galle durchtreten lässt, angesehen werden.

Ueber den Werth der Leucocytensubstanzen in den Secreten des Darmkanales lässt sich selbstredend auf Grund der bis jetzt bekannten Thatsachen kaum eine Andeutung machen.

Dass in der Gallenblase höchst wahrscheinlich, wie in allen übrigen Drüsen, eine periodische Steigerung und Verringerung der Leucocyten und ihrer Durchwanderung vorhanden sein mag, darf a priori angenommen werden.

III. Masseneinwanderung der Leucocyten aus den Solitärfollikeln in den Darmkanal.

Im letzten Decennium hat Herr College Stöhr in mehreren vorzüglichen Aufsätzen den sicheren Nachweis erbracht, „dass aus der adenoiden Substanz unmittelbar unter dem Epithel (der Schleimhäute) eine normale Auswanderung der Leucocyten statt hat, vorwiegend durch jenes Epithel, welches die Kuppen der Lymphknötchen deckt, und so die Leucocyten in die Darmhöhle wandern“.

Dieser Vorgang in der Darmschleimhaut ist nach dem, was bis jetzt von verschiedenen Autoren über denselben bekannt geworden ist, als unzweifelhafte Thatsache anzusehen. Im Vorausgehenden wurde schon erwähnt, dass in der Gallenblase und den Gallenwegen Leucocytendurchwanderung stattfindet, und ich will nur noch hinzufügen, dass das Gleiche auch in der Tuba Eustachii zu beobachten ist.

In den folgenden Zeilen will ich die Beobachtungen mittheilen, welche ich an den solitären Follikeln des Darmkanales und des Processus vermiformis des Menschen gemacht habe.

Ueber das Verhalten der Darmfollikel liegen zwei specielle Arbeiten von v. Davidoff und Ph. Stöhr vor. Die Angabe von His, dass in der Schleimhaut des Dünn- und Dickdarmes an jenen Stellen, welche Follikel einschliessen, die Lieberkühn'schen Drüsen fehlen, wurde oben schon erwähnt.

Die Follikel drängen sich nicht einfach zwischen die Lieberkühn'schen Drüsen hinein und verdrängen dieselben, sondern die genannten Drüsen gehen zu Grunde und indem ihre Cylinderzellen sich zu Rundzellen umbilden und sich mit den Leucocyten mischen, entsteht für den jetzt ausgebildeten Follikel genügend Raum, sodass derselbe als convexer Hügel gegen das Darmlumen vorspringt. Beim Kaninchen

sind die Follikel in Buchten der Schleimhaut eingeschlossen, sodass der die Lieberkühn'schen Drüsen führende Theil der Schleimhaut über die Zotten hervorragt. Wenn die Schleimhaut etwas neben der Kuppe des Follikels getroffen wird, so macht derselbe den Eindruck, als sei er vollständig von einer Schleimhautkapsel umhüllt. Jeder Follikel, gleichviel ob er einfach abgerundet ist, oder zwei bis drei secundäre Hügel besitzt, ragt in das Lumen des Darmrohres in der erwähnten Weise hinein. Die Follikel, welche die freie Schleimhautfläche erreicht haben, stellen beim Kaninchen sämmtlich kleine runde Erhöhungen dar. Von hier aus ist die ganze Mucosa bis zur Muscularis propria des Wurmfortsatzes erfüllt von Follikeln.

Beim Menschen ist das Verhalten der Follikel wesentlich verschieden von jenem im Wurmfortsatz des Kaninchens.

Dort drängt sich der Leucocytenhaufen gegen die freie Oberfläche der Schleimhaut und bildet an derselben ein convexes Knötchen. Die Entwickelung geht von der äusseren Schleimhautzone aus und wenn der Follikel eine gewisse Grösse erlangt hat, so rückt derselbe bis in die Submucosa hinein und berührt selbst die Muscularis propria des Darmes. Der gewöhnliche Vorgang ist jedoch der, dass der Follikel bald gegen die Lieberkühn'schen Drüsen vorrückt, diese in der angegebenen Weise umwandelt und das Epithel der Schleimhautoberfläche erreicht.

Der Druck, welcher von Seite des Follikels auf das Epithel ausgeübt wird, verdünnt dasselbe derart, dass seine Cylinderzellen immer niedriger werden. Während an den seitlichen Flächen des Hügels die Cylinderzellen ihre normale Form beibehalten und direkt in jene der Lieberkühn'schen Drüsen sich fortsetzen, schreitet die Verkürzung der Zellen auf der Kuppe des Hügels (s. Fig. 1) immer weiter fort und schliesslich ist aus der Cylinderzelle eine ganz platte, aber immer noch vierseitige Zelle geworden,

welche sich endlich loslöst. Der Follikel ist nach dem Darmlumen hin geöffnet und die Leucocyten dringen massenweise aus demselben in den Darm ein (s. Fig. 2 und 3). Dass die Perforation ständig vor sich geht, kann man unschwer beobachten. Ich besitze Präparate von einem Enthaupteten, welcher im Darmkanal keinerlei pathologische Veränderungen zeigte. Es ist anzunehmen, dass diese Eröffnung der solitären Follikel eine periodische ist und wohl abhängig sein mag von den Verdauungsvorgängen im Darm.

Was soll das Vorrücken der Follikel nach der freien Oberfläche der Darmschleimhaut, die allmähliche Verdünnung des hohen Cylinderepithels und die endliche Zerstörung desselben bedeuten, wenn alle diese Vorgänge nicht die Freilegung der Leucocytenhaufen und die endliche Einwanderung der Wanderzellen aus ihm in den Darmkanal das Endziel derselben wäre?

Ich besitze Präparate, welche gar keinen Zweifel aufkommen lassen, dass diese Vorgänge an allen Follikeln in der besprochenen Weise sich abspielen. Wir sehen, dass die Einwanderung der Leucocyten ins Darmrohr durch diesen massenhaften Eintritt der Leucocyten in dasselbe noch gesteigert wird und so eine Quantität von Material in die Verdauungswege gelangt, welches dort unzweifelhaft eine Rolle spielt, deren Bedeutung noch erst ermittelt werden muss.

Das Secret der Tonsille und der Follikel, die Einwanderung der Leucocyten in der Form, welche uns Stöhr zuerst kennen gelehrt hat, sowie die Durchwanderung der Leucocyten in der Gallenblase und den Gallenwegen kann unmöglich zwecklos für die physiologischen Vorgänge im Darmrohr stattfinden.

Die chemischen Produkte der Leucocyten müssen im Darm eine Bedeutung haben, eine Annahme, die umsomehr Berechtigung hat, wenn man nachweisen kann, dass die eingewanderten Zellen sich alle auflösen, indem dieselben

in dem Inhalt des Darmrohres verschwinden und bei der Behandlung mit Farbstoffen stellenweise eine amorphe Masse in dem Inhalt des Darmrohres jene Färbung annimmt, welche die Kerne der Leucocyten zeigen.

Nach allem, was ich beobachten konnte, verlieren alle Leucocyten, welche aus der Schleimhaut ausgetreten sind, ihre normalen Eigenschaften. Das erste, was man beobachten kann, ist der Zerfall der Kerne.

Zwei, vier und mehr Kerne entstehen aus dem grossen Kern eines Leucocyten und dieselben treten endlich vereinzelt (s. Fig. 10) in der Nähe der Schleimhautoberfläche auf. Sobald dieselben sich aber mit dem Darminhalt vermischt haben, gehen die geformten Eigenschaften verloren und es können nur die von ihnen abstammenden chemischen Substanzen eine Bedeutung haben.

Stöhr sagt am Schlusse seiner Abhandlung im Archiv für mikroskopische Anatomie mit Recht: „Wir stehen hier noch vor einer ganzen Reihe offener Fragen, deren Beantwortung weiteren Untersuchungen vorbehalten ist.“ Je mehr man hier die einzelnen speciellen Vorgänge kennen lernt, um so klarer erkennt man, dass noch eine Anzahl von Problemen der Lösung harren. Ich begnüge mich vorläufig mit der Mittheilung der Thatsachen und enthalte mich, Hypothesen zu erörtern.

IV. Durchwanderung der Leucocyten an der Tonsille.

Die zweite Mittheilung, welche den Durchgang der lymphoiden Zellengruppen in der Tonsille betrifft, erfordert zunächst, dass ich ziemlich weit zurückgreife in die Literatur jener Zeitperiode, in der die ersten genauen Angaben über den Bau der Tonsillen überhaupt gemacht worden sind. Wenn auch Langenbeck und E. H. Weber die besten und eingehendsten Beschreibungen der Balg-

drüsen der Zungenwurzel geliefert haben, so muss man doch mit Kölliker einverstanden sein, wenn er im Jahre 1852 angibt, dass noch von keinem Autor die Balgdrüsen an der Zungenwurzel der Natur entsprechend geschildert worden seien. Kölliker gab damals schon an, dass es beim Menschen in sehr vielen Fällen ganz unmöglich sei, begrenzte Follikel in den Wänden der Tonsillen aufzufinden, eine Angabe, welche der Autor damals auf die sehr häufigen Erkrankungen, denen die Tonsillen unterworfen seien, zurückführte. „Es scheinen", sagt Kölliker, „bei den Entzündungen des Organes und ihren Folgen diese Follikel anzuschwellen, in ihrem Inhalte sich zu ändern und dann zu bersten" und so, meinte dieser Forscher, werde in den Wänden der Mandeln der normale Bau nicht mehr erkannt.

Die Frage nach der normalen und pathologischen Beschaffenheit des Tonsillengewebes dürfte unzweifelhaft am einfachsten zu beantworten sein, wenn man die thierischen Mandeln studirt, bei denen die krankhaften Veränderungen gewiss viel seltener vorkommen, als bei dem Menschen, obschon auch hier fast ganz constant Eigenthümlichkeiten sich zeigen, die wegen der Constanz ihres Vorkommens nicht als pathologische gedeutet werden können. Schon 1852 gibt auch Kölliker an, dass das, was beim Menschen schwer sich gewinnen lasse, bei Thieren mit Leichtigkeit zu erlangen sei.

Was die Zahl und die Grösse der Follikel in den Tonsillen anlangt, so wissen wir heute, dass die lymphoiden Zellen in den Schleimhäuten innerhalb physiologischer Grenzen sehr wechselnd sind. Man kann bei dem einen Individuum eine bedeutende Ansammlung von Leucocyten und lymphoiden Zellengruppen beobachten, bei einem anderen treten dieselben sehr spärlich auf. Die Querschnitte des Wurmfortsatzes lassen bei dem einen Menschen doppelt so viele Follikel zählen, als bei einem anderen, ohne dass nennenswerthe Organerkrankungen im Körper nachgewiesen werden könnten.

Ein verhungerter Affe zeigte im Dünndarm, Dickdarm und Wurmfortsatz äusserst wenige Schleimhautfollikel, eine Thatsache, welche von mehreren Forschern schon beobachtet wurde und die zweifellos für die Annahme spricht, dass der Reichthum der lymphoiden Zellen im Wirbelthier wesentlich abhängig ist von der Ernährung desselben.

Wenn Kölliker schon im Jahre 1852 mittheilen konnte, dass in der Tonsille des Ochsen die Follikel minder deutlich, oft gar nicht auftreten, so stimmt diese Angabe ganz und gar überein mit den zahlreichen späteren Beobachtungen, nach denen der Follikel überhaupt nicht immer als ein scharf begrenztes Gebilde, sondern auch als ein diffuses Infiltrat von lymphoiden Zellen in der Schleimhaut auftreten kann. Wenn auch in den mehr oder weniger dichtgedrängten Zellengruppen eigenartige „Keimcentra“ auftreten und um diese herum die lymphoiden Zellen in concentrischen Reihen sich gruppiren, so ist doch zur Zeit festgestellt, dass auch die einzelnen Follikel niemals scharf von einander abgegrenzt sind, sondern an ihrer Peripherie in einander übergehen. Die lymphoiden Zellen treten nur als ein Infiltrat in der reticulären Bindesubstanz der Schleimhaut, der „conglobirten Drüsensubstanz“ Henle's auf. Neben dem Keimcentrum und der dichtgedrängten Randzone der Leucocyten befindet sich in jedem Follikel ein peripheres Zellenstratum, das ohne nachweisbare Grenze in ähnliche Zellenstrata anderer Follikel übergeht und, wie Kölliker sich ausdrückt, „formlose Massen“, die Henle'sche „conglobirte Drüsensubstanz“ darstellt. Man kann gegenwärtig als feststehend annehmen, dass in verschiedenen Abschnitten des Verdauungstractus diffuse Infiltrate von lymphoiden Zellen ohne Follikelbildung vorkommen. Selbst in der Tonsille sind nicht immer ausgebildete Follikel nachweisbar, während an der Zungenwurzel, im Dickdarm und im Wurmfortsatz die Leucocyteninfiltrationen meist in Form von Follikeln auftreten. Auch in dieser Hinsicht will

Kölliker zwei Gruppen, constante und variable, unterscheiden. Die constanten seien in den Mandeln, dem Pharynx, in den Zungenbalgdrüsen, der Milz, den Peyer'schen Haufen und in dem Dickdarm vorhanden; während die weniger constanten in dem Magen und dem Dünndarm sich vorfinden (s. Discussion nach dem Vortrag von Stöhr in der physikalisch-medicinischen Gesellschaft in Würzburg 1883). Aber auch die weniger constanten lymphoiden Follikel hält Kölliker für normale Gebilde.

Von den Pathologen sind schon seit längerer Zeit Angaben vorhanden, nach welchen sowohl durch Cylinderepithel, als auch durch Plattenepithel die Durchwanderung der lymphoiden Zellen beobachtet wurde und selbst in Geschwülsten hat man die Leucocyten in grosser Zahl beobachtet. In einer unter der Leitung von Prof. Oertel bearbeiteten Dissertation von Dr. Lange wird auch darauf hingewiesen, dass in einem papillären Epitheliom das Epithel von zahllosen Leucocyten durchsetzt gewesen sei, und zwar insbesondere in den obersten Lagen.

Die Zahl der Beobachtungen über den Durchgang der lymphoiden Zellen durch das Epithel der Tonsillen in dem Isthmus faucium ist sehr gross, so oft aber diese Thatsache zur Beobachtung kam, wurde dieselbe meist als eine pathologische Erscheinung zurückgedrängt. Man suchte den Gedanken, dass möglicherweise doch ein normaler Vorgang von hoher Bedeutung vorliege, stets zu bekämpfen.

Die Forschungsergebnisse Stöhr's über die Durchwanderung der Leucocyten durch die Schleimhäute waren ganz und gar geeignet, die vielumstrittene Frage über die Bedeutung der zahllosen lymphoiden Zellen in den Schleimhäuten des Tractus intestinalis ihrer Lösung näher zu bringen. Die lymphoiden Zellen wandern durch das verschiedenartigste Epithel der Schleimhäute durch und gesellen sich, wo ein Inhalt sich befindet, diesem bei, oder dieselben

mischen sich mit dem Secret der Drüsen in den Respirationswegen und werden aus dem Körper, als Auswurfsprodukte, entfernt.

Zuerst hatte Stöhr lymphoide Zellen zwischen den Cylinderepithelien der Magenschleimhaut beobachtet. Obschon beiläufig gemachte Beobachtungen bekannt waren, aber keine Deutung erfuhren, verfolgte Stöhr die am Magen gemachte Beobachtung auch an anderen Schleimhäuten und stellte fest, dass an den Tonsillen, den Balgdrüsen, an den solitären und conglobirten Drüsen des Darmes, in der Bronchialschleimhaut normaler Weise eine massenhafte Durchwanderung lymphoider Zellen zwischen dem Epithel (nach dem Innern des Lumens) stattfindet. Ich will noch weiter hinzufügen, dass die lymphoiden Zellen nicht nur zwischen den Epithelzellen durchwandern, sondern in die Plattenepithelien an der Tonsille eindringen, diese lockern und zerstören und Lücken in der Epithellage hervorrufen, durch welche eine massenhafte Einwanderung der Leucocyten aus der Schleimhaut in das Darmrohr erfolgt.

Was meine eigenen Beobachtungen an der Tonsille des Menschen anlangt, so wurden dieselben mit Rücksicht auf die Einwendungen, dass die Mandel beim Menschen häufig pathologisch verändert sei, auch auf die Thiere ausgedehnt. Soviel ich bis jetzt ersehen konnte, sind in den wesentlichen Punkten so auffallende Uebereinstimmungen in den Ergebnissen, welche an der Tonsille des Menschen und der Säugethiere gewonnen wurden, vorhanden, so dass man sagen kann, die Resultate an der Mandel des Menschen wurden mit einem gewissen Vorurtheil entgegengenommen.

Indem ich meine Beobachtungen in Folgendem mittheile, will ich mich auf jene Figuren beziehen, welche

theils von menschlichen, theils von thierischen Präparaten gewonnen sind.

Dass der Reichthum an lymphoiden Zellen in der Mandel individuell wechselnd erscheint, wurde von verschiedenen Autoren schon constatirt und von mir oben schon hervorgehoben; allein in der Tonsille sind sowohl die Follikel, als auch die lymphoide Infiltration viel constanter, als in den übrigen Schleimhäuten. Die Zahl und Grösse der lymphoiden Zellen wechseln im Dünn- und Dickdarm viel mehr, als in den Mandeln. Es sind auch in ganz kleinen, atrophischen Mandeln immer noch viele Leucocyten vorhanden. Im Darmkanal dagegen kann man Objekten begegnen, in welchen die lymphoiden Zellen überraschend gering an Zahl sind.

Prüft man eine Reihe von Schnitten, so findet man an einzelnen Stellen die Plattenepithellage ganz unversehrt. Die tiefste Zellenlage ist ganz regelmässig gebildet. Die hohen mehr cylinderförmigen Zellen stehen als tiefste Lage so geordnet nebeneinander (s. Fig. 5), dass selbst ihre Kerne keinerlei Abweichungen von einander erkennen lassen. Jedenfalls muss es auffallen, dass man solchen regelmässigen Anordnungen der tiefsten Zellenlagen im Verhältniss zu den ungleich dicken und irregulären Bildungen nur vereinzelt begegnet. Die abwechselnde Dicke des Epithels, und die Unregelmässigkeit aller Zellenschichten des Plattenepithels ist an den Tonsillen ungewöhnlich häufig zu beobachten, eine Erscheinung, die einer besonderen Aufmerksamkeit werth erscheint, wenn man dieselbe vergleicht mit Präparaten der äussern Haut, der Speiseröhre oder des Darmkanales. Die Darmschleimhaut, welche keine Leucocyten einschliesst, zeigt im Allgemeinen in der Anordnung des Cylinderepithels, der Becherzellen u. dgl. eine nur ganz geringe formelle Verschiedenheit. Während Hunderte von Schnitten, die von der Dünn- oder Dickdarmschleimhaut gewonnen werden, einander sehr ähnlich sind, zeigen die Tonsillenpräparate von ver-

schiedenen und von einem und demselben Objekte auffallende Unterschiede. Die verschiedene Dicke des Epithels, die regellose Anordnung ihrer einzelnen Epithelschichten wird durch das Verhalten der Leucocyten in der Tonsille hervorgerufen. Solange die Follikel in der Tonsille nicht gross sind, haben sie von der tiefsten Zellenschichte des Epithels einen geringen Abstand. In dem Verhältniss aber, als sich ein Follikel vergrössert, rückt er der Epithellage immer näher und bei seiner Annäherung ist der erste Vorgang der, dass die Zellen des Rete Malpighii in Unordnung gerathen; ihre Verbindung wird gelockert (s. Fig. 6), was sofort an der veränderten Stellung der Kerne erkannt wird. Sehr bald bemerkt man, dass die Verschiebung der Zellen durch das Vordringen einzelner Leucocyten zwischen dieselben bedingt wird. Ist einmal die tiefste Zellenlage in Unordnung, dann scheint das massenhafte Vordringen der lymphoiden Zellen ganz rasch vor sich zu gehen. Während des Vordringens vereinzelter Zellen, das man vielfach beobachten kann, findet keine Veränderung der Epithelien statt. Die Leucocyten drängen sich in diesem Falle, indem sie eine langgestreckte Form annehmen, zwischen den Plattenepithelien bis zur freien Oberfläche durch und hier sieht man sie vereinzelt oder auch in kleinen Gruppen, entweder frei in einer Tonsillenspalte, oder sie kleben noch an der Oberfläche der glatten Epithelien, die keine wesentlichen Veränderungen zeigen, fest.

War der Angriff von Seite eines grossen Follikels ein intensiver, so gehen die tiefsten Epithelzellen, welche mehr runde Formen annehmen, zu Grunde und in den weiteren Zellenlagen kann man beobachten, dass der Leucocyt in die Epithelzelle eindringt und, wie ich vermuthe, zunächst das Protoplasma der Zelle und dann diese selbst zerstört. Die Epithelzelle wird bald hell, der Raum, wo die Zelle lag, wird grösser und schliesslich findet man lichte, grosse Lücken mit Zellen und mehreren runden, kleinen Kernen erfüllt,

welche durch mitotische Vermehrung der Leucocyten (Flemming) bei dem Zerfall der Epithelzellen entstanden sind.

Dass eine theilweise Isolirung und auch eine Zerstörung der Epithelzellen stattfindet, unterliegt keinem Zweifel. Man muss viele derartige Präparate studirt haben, um die Ueberzeugung zu gewinnen, dass das Plattenepithel in der geschilderten Weise eine Zerstörung und Vernichtung erfährt. In den Tonsillenspalten findet man auch Epithelien als einzelne Zellen oder abgerissene Conglomerate mehrerer Epithelzellen von Leucocyten umringt (s. Fig. 10).

An gelungenen Präparaten, welche den Durchbruch der Epithellage nicht ganz vollständig zeigen, kann man die Art der Zerstörung des Plattenepithels sehr gut übersehen. Jene tiefere Zone der Epithellage, welche zuerst der Angriffspunkt für die Leucocyten war, zeigt nur vereinzelt eine Plattenepithelzelle, während in dem Randgebiet des Epithels die Zellen noch zahlreich vorhanden sind, aber nicht mehr geordnet erscheinen. In die einzelnen Epithelzellen sind die Leucocyten eingedrungen, und man erkennt die Zerstörung dann erst, wenn die Protoplasmazone der Epithelzelle heller, der Kern derselben zackig, unregelmässig und kleiner geworden ist. Wenn auch der Kern ganz vernichtet ist, treten kleine, runde Leucocyten in Gruppen miteinander verbunden auf. Diese Erscheinung ist so constant, dass es nicht gewagt erscheint, den Vorgang so zu deuten, dass die Epithelzellen durch die Leucocyten zerstört werden und zwar zunächst das in denselben noch vorhandene Protoplasma, dann auch der Kern und schliesslich eine Theilung, eine Vermehrung der Wanderzelle im Innern der Epithelzelle erfolgt. Bei dem weiteren Wachsthum der Theilstücke entstehen ganze Leucocytennester an jener Stelle, wo die Epithelzelle sich befand.

Hat die vollständige Durchwanderung stattgefunden, dann zeigt sich an einzelnen Schnitten die Tonsillenspalte

ganz erfüllt von Epithelien, Leucocyten und auch untermischt mit Riesenzellen.

Da aus der Follikelzone das Zellenmaterial immer nachrückt, so muss dasselbe, wie aus dem Ausführungsgang einer Drüse, an der Oberfläche der Mandel zum Vorschein kommen. Dass die Tonsillenspalten eine gewisse Regelmässigkeit zeigen, ergeben die Horizontalschnitte durch jene. An einer und derselben Spalte findet der Durchbruch in bestimmten Abständen statt, welcher, wie mir scheint, von der jeweiligen Reife, resp. der Grösse des Follikels abhängig ist.

Wenn in den Spalten der Tonsille viele vereinzelte oder auch zusammenhängende Gruppen der Plattenepithelien vorhanden sind, dann scheint der Durchbruch rasch stattgefunden zu haben, wobei Epithelgruppen zusammenhängend mit Leucocyten losgerissen wurden; in jenem Falle dagegen, in welchem der Durchbruch, wie anzunehmen ist, langsam erfolgt, beobachtet man sehr wenige Epithelzellen und zahlreiche Gruppen von Leucocyten mit kleinen runden Kernen.

Je tiefer man in alle diese Vorgänge einzudringen sucht, umsomehr zeigt sich die Schwierigkeit auf alle die auftauchenden Fragen eine befriedigende Antwort zu geben.

Von besonderem Interesse erscheint die Lücke, welche in dem Epithel an der Stelle des Durchbruchs entstanden ist. Wollte man für die einzelnen Stellen die entstandene Oeffnung nachbilden, so bekäme man einen Trichter, dessen engstes Gebiet der freien Oberfläche des Epithels, das weiteste dorthin, wo der Follikel war, gerichtet ist. Die Zerstörung der Epithellage nimmt nach der Tiefe zu und die ganze Umrandung stellt eine zerklüftete Wand dar. In dem Lehrbuch der Histologie des Menschen von Böhm und Davidoff befindet sich auf S. 165 die Abbildung Fig. 115, an dem zerklüfteten unterminirten einen Rand der Oeffnung auf dem Durchschnitt sehr klar zur Darstellung kam (s. auch in meiner Fig. 8).

Noch andere Wege der Einwanderung der Leucocyten in der Epithellage kann man beobachten. Man begegnet an den Tonsillenschnitten Haufen von Leucocyten, welche zapfenförmig oder inselartig im Epithel stecken. Dieselben verhalten sich zum Plattenepithel geradeso, wie die beschriebenen Follikel. Das Endresultat dieser Zapfen ist auch das Vorrücken gegen die freie Oberfläche und die Auswanderung ihrer lymphoiden Zellen in die Mandelspalten.

Nach eingehendem Studium musste man die Ueberzeugung gewinnen, dass die Zapfen an den stellenweise spärlich vorhandenen Papillen in dem Epithel entstehen, indem die Leucocyten von der Basis der Papillen aus, nach der Spitze hin vorrücken und die Epithelzellen ebenso zerstören, wie das papillenfreie Epithel, das viel mehr Widerstand entgegensetzt, als die mehr oder weniger ausgebildeten Papillen an der Mandel. Die inselartig auftretenden Leucocytengruppen zeigen sich an Schiefschnitten, an welchem der Zusammenhang der Inselgruppe an einem Schnitt unterbrochen worden ist.

Hat man lückenlose Schnittreihen zur Verfügung, so lässt sich der Zusammenhang des Leucocytenhaufens mit jenen unter dem Epithel befindlichen Gruppen stets leicht nachweisen.

Eine besondere Aufmerksamkeit schenkte ich den Perforationszonen und der Art ihrer Verschliessung. Man kann hier nur aus dem wechselnden Verhalten der Epithellage an den verschiedenen Stellen einen Schluss ziehen auf die Regeneration des Epithels. Fasst man diese Stellen an der Tonsillenoberfläche oder in den Spalten ins Auge, wo unter der Epithellage keine oder nur wenige Leucocyten vorhanden sind, so zeigt sich die Epithellage normal, gleichmässig dick und mit Papillen, wenn auch nicht gleichmässig, durchsetzt. Dort jedoch, wo lymphoide Zellengruppen an das Epithel angrenzen, treten die variablen Veränderungen der Deckschichte auf. Was man aus einem Vergleich der Präparate

entnehmen kann, ist, dass eine Vermehrung der Epithelien an der Peripherie der Perforationsöffnung als wahrscheinlich anzunehmen ist. Unzweifelhaft werden hier ganz ähnliche Vorgänge stattfinden, wie bei jeder Wundheilung, die am Plattenepithel der Mundhöhle oder der äusseren Haut eintreten. Von den vorhandenen normalen Epithelzellen der Umgebung einer Lücke schieben sich die Zellen vor und bilden anfänglich eine dünne Epithellage, die weder den Charakter der Plattenepithelien, noch jenen der Zellen des Rete Malpighii tragen. Solange die Leucocyten oder die zu Follikel umgewandelten Gruppen fehlen, behält die Epithellage ihre normale, gleichmässig dicke Beschaffenheit bei. Treten stärkere Ansammlungen in der Tunica propria des Epithels auf, so beginnt auch sofort die beschriebene Einwirkung auf die Epithelschichte. Bei diesem unausgesetzt wechselnden Vorgang an dem Epithel, welcher abhängig ist von der Neubildung der Leucocyten, beobachtet man auch normale Epithellagen, welche mit zerstörten abwechseln an allen Stellen der Mandel, gleichviel ob dieselbe an der freien Aussenseite oder in den Spalten untersucht wird.

Je bedeutender der Defect am Plattenepithel ist, um so reicher hat sich das Material in den Mandelspalten angesammelt. Dass der Inhalt der Spalten (s. Fig. 10), welcher an Präparaten von Thieren und dem Menschen geprüft wurde, nicht entfernt an pathologische Bildungen, an zerfallene Massen erinnert, ist leicht zu constatiren.

Schlussbemerkung.

Wir sehen, dass an der Mandel zweierlei Vorgänge sich abspielen. Der eine Vorgang besteht in der von Stöhr beschriebenen Durchwanderung von einzelnen Leucocyten zwischen den Epithelzellen ohne Zerstörung der Epithelschichte. Waren auch durch Arnstein, Edinger, Franken-

häuser, Rauber, Bonnet und Toldt die Durchwanderungen der Leucocyten schon bekannt, so muss man doch Stöhr das Verdienst zuschreiben, diesen Vorgang als einen constanten, normalen zuerst festgestellt zu haben.

Der zweite Vorgang ist der der Epithelzerstörung an der Mandel durch die Leucocyten und massenhafter Einwanderung derselben nach dem Isthmus faucium. Diese massenhafte Einwanderung in den Schluckapparat hat eine Entleerung der Leucocyten aus dem Stratum proprium und aus dem Epithel zur Folge und nachherige Regeneration der ganzen Schleimhaut. Dass die Mandeln mit ihren Spalten, wenn dieselben von Leucocyten erfüllt sind, beim Schluckakt unter dem Einfluss einer ganz kräftigen Muskelcontraction stehen, unterliegt gar keinem Zweifel. Die Compressionswirkung des Musc. glossopalatinus und pharyngopalatinus, welche eben keine isolirten Muskelzüge, sondern nur vorspringende Partien der verticalen Längszüge des Pharynx darstellen, ist eine von verschiedenen Autoren längst festgestellte Thatsache. Die ganze Muskelnische in Verbindung mit dem Gaumensegel muss bei jedem Schluckakt eine Compression der Mandel hervorbringen und dieselbe muss, wenn Oeffnungen im Mandelepithel vorhanden sind, die Leucocyten mit auspressen.

Warum sind die Mandeln an der freien Oberfläche der Schleimhaut am Isthmus faucium zwischen den beiden Muskelarcaden eingebettet? Hätten dieselben keine besonderen Beziehungen zum Verdauungsapparat, sondern nur zu den Lymphgefässen, so könnten sie ähnlich den Lymphdrüsen an den verschiedensten Körperstellen angebracht sein. Müssten die Wanderzellen in den Mandeln nur die Wege nach den Lymphbahnen aufsuchen, so wäre ihre topographische Lage durchaus nicht an der freien Oberfläche der Schleimhaut des Schluckapparates erforderlich.

Die Lage der Mandeln, ihre Einbettung in Muskelnischen und die Eröffnungen ihrer Follikel nach der freien

Fläche und den Mandelspalten oder Buchten derselben legen denn doch die Frage nahe, ob hier nicht drüsige Organe vorliegen, die ihren Inhalt an den Bissen abgeben und die Annahme gestatten, dass die Milliarden von Leucocyten, in denen man schon „Nucleïnsäure“ constatirt hat, eine physiologische Verwendung im Darmkanal finden.

Fasst man alle Thatsachen: den Durchbruch der Leucocyten an den Mandeln, die Eröffnung der Sollitärfollikel im Darmkanal, die Durchwanderung zahlloser Leucocyten an der gefalteten grossen Oberfläche der Gallenblasenschleimhaut u. A. zusammen, so muss man sich sagen, dass alle diese erwähnten Vorgänge nur sehr schwer die Annahme begründen lassen, dass ein so reiches Material, welches der Nahrung im Darm beigegeben wird, nur als ein Auswurfsprodukt gedeutet werden kann. Da kein Beweis hiefür erbracht ist, so ist gewiss die Vermuthung berechtigt, dass die grossen Massen der Leucocyten, welche vom Schlundkopf und dem Isthmus faucium an bis hinab zum Mastdarm in den Darmkanal eintreten, in diesem eine physiologische Rolle zu spielen bestimmt sind, oder wie Kölliker schon meinte, dass diese Zellen nach ihrem Austritt aus der Schleimhaut möglicherweise noch Verwendung finden.

Jedenfalls ist die Frage über die Einwanderung der Leucocyten in den Darm eine Frage von hoher Bedeutung, gleichviel ob dieselbe durch weitere Forschungen in dem einen oder anderen Sinne entschieden werden mag.

Unterlassen will ich es nicht, noch auf eine andere Seite der vorliegenden Betrachtung hinzuweisen, die für pathologische Vorgänge besondere Beachtung verdient. Ich meine die in Folge des Durchbruches der Leucocyten, insbesondere, wenn derselbe massenhaft erfolgt, entstandenen Schleimhautdefecte, wie sie sowohl an der Tonsille, als auch an den solitären und Peyer'schen Drüsen im Darm vorkommen.

Hier werden Schleimhautdefecte erzeugt, welche wie bei einer Haut- oder Schleimhautwunde eine gewisse Zeit zur Regeneration erfordern. Sollen diese Schleimhautzerstörungen nicht als offene Pforten anzusehen sein, durch welche pathogene Ursachen von aussen her eindringen können? Ich meine, es sei berechtigt zu fragen, warum die Diphtherie gerne an den Mandeln und dem Pharynx, bei dem Abdominal-Typhus die pathologischen Veränderungen an den solitären und den Peyer'schen Drüsen vorwiegend auftreten? Hier wie dort sind stets kleine, zahlreiche Schleimhautdefecte vorhanden, mit einer, wenn auch nur vorübergehenden Zerstörung der epithelialen Schichte und der Basalmembran. Wenn nun pathogene Ursachen mit den Schleimhautstellen, welche vorübergehend keine epitheliale Deckschichte besitzen, in unmittelbaren Contact kommen, so erscheint doch die Annahme plausibel, dass Einwirkungen ebenso zu Stande kommen, wie an jeder Wunde, wie auch beispielsweise an einem Uterus, der in Folge einer Geburt an seiner Schleimhaut verwundet ist. Auch hier ist die Zerstörung der Uterusschleimhaut und deren Neubildung ein physiologischer Vorgang, - ebenso, wie die Veränderungen am Graaf'schen Follikel des Eierstockes und der Schleimhaut des Uterus bei jeder Menstruation.

V. Beschreibung der Figuren
(auf Tafel I u. II).

Fig. I. **Querschnitt eines lymphoiden Follikels aus dem Processus vermiformis des Menschen.**

1. Lieberkühn'sche Drüse, welche an der Schnittfläche den Follikel an beiden Seiten umrahmen. Ich hebe hier besonders hervor, dass die grossen Drüsen nicht verdrängt erscheinen, sondern mit ihren Längsdurchmessern zur Oberfläche der Schleimhaut eine mehr rechtwinkelige Stellung einnehmen. 2. Fundus der Lieberkühn'schen Drüsen mit hohen Cylinderepithelien. 3. An der freien convexen Seite des Follikels, welcher stark an der Oberfläche der Schleimhaut vorspringt, ist das Cylinderepithel ganz im Verhältniss der Vergrösserung des Follikels niedrig geworden. Bei noch mehr erhöhtem Druck von Seite des Follikels auf das Epithel entstehen allmählich ganz dünne Platten, deren Querdurchmesser den ehemaligen Höhendurchmesser des Cylinders sehr bedeutend überwiegt. 4. Einzelne Lieberkühn'sche Drüsen. 5. Helleres Keimcentrum des Follikels. 6. Periphere dunkle Zone des Follikels.

Fig. II. **Ein Follikel aus dem Wurmfortsatz, an welchem das Epithel durchbrochen ist.**

1. Ziemlich hohes, normales Cylinderepithel am Rande des Follikels. 2. Niedriges Epithel an dem am meisten vorspringenden, convexen Abschnitt des Follikels, welches bei 3. ganz zerstört ist und den Follikel freigelegt hat. Die Begrenzungsmembran des Epithels ist noch stellenweise erhalten, allein auch diese geht verloren. Die Zahl der Leucocyten hat an der offenen Region des Follikels bedeutend abgenommen. 4. Lieberkühn'sche Drüsen, welche, soweit der Follikel reicht, vollständig fehlen. 5. Centrale helle Zone des Follikels.

Fig. III. **Solitärfollikel vom Wurmfortsatz des Menschen mit den ausgewanderten Leucocyten.**

1. Mündungen der Lieberkühn'schen Drüsen. 2. Epithel an dem nach dem Darmrohr prominirenden Abschnitt des Follikels, welches bei 3. durchbrochen ist. 4. Fundus einer Lieberkühn'schen Drüse. 5. Follikel ohne Lieberkühn'sche Drüse. 6. Die in das Lumen des Wurmfortsatzes eingewanderten Leucocyten, welche ihre specifischen Eigenschaften noch nicht geändert haben.

Fig. IV. Follikel aus der Tonsille vom Hunde.

1. Plattenepithelschichte, durchsetzt von Leucocyten. 2. Zerstörte und losgelöste Plattenepithelien. 3. Geöffneter Follikel mit vereinzelt erhaltenen Epithelzellen. 4. Follikel nach der freien Schleimhautfläche prominirend. 5. Die ausgewanderten Leucocyten hängen noch gruppenweise zusammen; dieselben haben sich jedoch schon vom Follikel entfernt.

Fig. V. Vollständig normales Epithel an einer Stelle der Tonsille, wie man es sowohl an deren Oberfläche, als auch in den Tonsillenspalten stellenweise antrifft. An dem gezeichneten Abschnitt waren nur zwei lymphoide Zellen zwischen den Epithelien nachweisbar.

1. Oberflächlichste Epithellage mit ganzen Plattenzellen an der Oberfläche. 2. Die tiefere Schichte mit polygonalen Zellen. 3. Das unterste Stratum mit den cylindrischen basalen Zellen grenzt das Stratum Malpighii gegen das Stratum subepitheliale ab. 4. Die an die basalen Zellen angrenzenden Leucocyten. 5. Vereinzelte Leucocyten zwischen den polygonalen Epithelzellen.

Fig. VI. Epithellage der Tonsille mit ein- und durchgewanderten Leucocyten. (Die Figuren 6, 7 und 8 sollen in der Aufeinanderfolge die Art der Durchwanderung und der Veränderungen des Epithels demonstriren.)

1. Oberflächlichste Schichte des Epithels, welches zwischen den Zellen und an der Oberfläche vereinzelte Leucocyten und Leucocytengruppen zeigt. 2. Die mittlere Epithelschichte erscheint mehr von Leucocyten durchsetzt, als die tiefste Zellenlage mit den Basalzellen. Wird die Fig. 6 verglichen mit der Fig. 5, so fällt sofort die Unregelmässigkeit der basalen Zellen auf, welche in Folge der Durchwanderung der Leucocyten ihre geordnete normale Anordnung verloren haben (3). 4. Die im Stratum subepitheliale befindlichen Leucocytengruppen.

Fig. VII. Ein Abschnitt des Epithels, in welchem die Leucocyten in das Epithel eingedrungen sind und als Gruppen von kleinen runden Kernen, an dem schwer eine Zellenmembran zu unterscheiden ist, auftreten.

1. Oberflächlichste Plattenepithellage. 2. Die Epithelzellen zeigen in dieser Schichte stellenweise einen grösseren Abstand von einander. 3. Die basalen Zellen zeigen bei 4. ein irreguläres Verhalten gerade dort, wo die grösseren Massen der Leucocyten im Eindringen begriffen sind. 5. Leucocyten, welche mehr und mehr in das Epithel eintreten.

Fig. VIII. An diesem Objekt sind die Leucocyten massenhaft in das Epithel eingewandert. Die lichten Stellen werden von den Wanderzellen eingenommen, während die Epithelzellen an den lichten Stellen immer mehr abgenommen haben.

1. Oberflächliche Plattenepithelien, welche ihre frei ebene Oberfläche verloren haben. 2. Leucocytengruppen und Epithelgruppen annähernd in gleichem Verhältniss auftretend. 3. Eine zusammenhängende Epithelgruppe. 4. Zusammenhängende Leucocytengruppen. 5. Leucocytenmassen unterhalb der ursprünglich vorhandenen Basalzellen, welche als solche nicht mehr zu erkennen sind. 6. Leucocyten, welche an der freien Oberfläche angekommen sind und die Durchwanderung vollbracht haben.

Fig. IX. Querschnitt eines grossen Drüsenausführungsganges am Schlundkopf. Auch an dem Ausführungsgang dringen die Leucocyten in grosser Zahl zwischen dem Cylinderepithel hindurch und gesellen sich schliesslich zu dem Secret im Ausführungsgange.

1. Weites Lumen des Ganges. 2. Cylinderepithel desselben. 3. Leucocyten an der Aussenseite des Ganges. 4. Leucocyt in einer etwas tingirten Secretmasse. 5. Leucocyten, welche in das Lumen eindringen.

Fig. X. Die in einer Tonsillenspalte befindliche Secretmasse.

1. Epithelzellen von bedeutender Grösse. 2. Epithelzellen mit mehreren Kernen. 3. Einfache Epithelzelle. 4. und 5. Vier Epithelzellen und zwei Leucocyten, dann eine Epithelzelle und eine Wanderzelle. 6. Vereinzelt auftretende Leucocyten. 7. Leucocyten mit mehrfacher Kerntheilung, welch letztere auch vereinzelt auftreten.

Fig. XI. Tonsillenepithel vom Hunde mit zapfenförmig vorspringenden Leucocytenhaufen. In dem Epithel selbst sind nur wenig eingedrungene Leucocyten sichtbar.

1. Epithel an der Oberfläche. 2. Fast vollständig durchbrochene Epithellage. 3. Leucocytenmassen unter dem Epithel. 4. Kleiner abgerundeter Fortsatz. 5. Grösserer Fortsatz, welche beide den Papillen entlang sich entwickelt haben und von den Basalstellen derselben aus in verschiedener Richtung in das Epithel eingedrungen sind.

Fig. XII. Abschnitt eines Wurmfortsatzes vom Hunde.

1. Normales Verhalten des Epithels an der Oberfläche der Schleimhaut. 2. Tiefe Bucht zwischen zwei Schleimhautfalten. 3. Lieberkühn'sche Drüsen. 4., 5., 6. und 7. stellen Lieberkühn'sche

Drüsen dar, welche durch die Einwirkung der Leucocyten in der Veränderung begriffen. An der einen Wand einer Drüse sind die Cylinderzellen schon zu Rundzellen umgewandelt, während sie an der andern noch in regelmässiger Ordnung gestellt sind. 8 und 9. Frei im Darmrohr befindliche Leucocyten, welche sich allmählich auflösen und endlich als gleichmässige Masse auftreten.

Fig. XIII. Drei Lieberkühn'sche Drüsen vom Wurmfortsatz des Hundes, welche in der charakteristischen Veränderung durch Einwirkung der lymphoiden Zellen begriffen sind.

Bei Fig. 1, 2 und 3 zeigen sich die Veränderungen ganz ebenso, wie ich dieselben am menschlichen Processus vermiformis beschrieben habe. 1 und 2 sind die Cylinderepithelien noch in regelmässiger Anordnung. Bei 3 ist kaum mehr eine charakteristische Cylinderzelle sichtbar. Die Mehrzahl derselben sind Rundzellen geworden und nur schwer von den Leucocyten zu unterscheiden. 4. Die Tunica propria der Drüse ist an jener Seite, wo die Leucocyten den Angriff vollzogen haben, zerstört. 5. Leucocytengruppe an der Stelle, wo die Lieberkühn'sche Drüse gewesen ist. 6 und 7 stellen Leucocytengruppen von verschiedener Dichtigkeit der Zellen dar.

Fig. XIV. Querdurchschnitt der Wand der Gallenblase des Menschen.

1. Muscularis der Gallenblase, deren Schichtung eine abwechselnde ist. 2. Grössere Zweige der Art. cystica. 3. Die Submucosa der Gallenblase ist sehr schwach, kaum nennenswerth ausgebildet, und vielfach reicht die Muscularis direkt an die Schleimhaut an. 4, 5, 6 und 7 zeigt die zierlichen, nicht verstreichbaren Falten der Schleimhaut, welche das bekannte ziemlich regelmässig angeordnete Faltennetz darstellen. Man erkennt die Falten als isolirte, zusammenhängende und netzartig verbundene Erhebungen (5), welche eine sehr bedeutende Oberfläche zu Stande bringen.

Fig. XV. Schleimhautfalte der Gallenblase durchschnitten.

1. Ein Abschnitt der Falte, an welchem die Cylinderzellen mit ihren Kernen eine grosse Regelmässigkeit zeigen. Jede einzelne Zelle tritt an der freien Oberfläche etwas gewölbt hervor. Die nach der Tiefe gerichteten Enden stehen häufig, konisch zulaufend, etwas von einander ab. 2. Der Zwischenraum zwischen den Epithelreihen ist äusserst gering. In der Bindesubstanz befinden sich fixe Bindegewebskörperchen und Leucocyten. Zwischen den Epithelzellen erkennt man an diesem Präparat keine durchwandernden Leucocyten.

Fig. XVI. Querschnitt einer Schleimhautfalte mit durchwandernden Leucocyten.

1. Vollständig normale Epithelzellen. 2. Ein Leucocyt mit langgestrecktem Kern, der zwischen zwei Cylinderzellen eingetreten ist. 3. Ein Leucocyt, der in der Mitte der Cylinderzellen steckt, und an dem die Zellenmembran an der freien Epithelseite sichtbar wird. 4. Leucocyt, welcher im Austreten begriffen ist. 5. Bei allen jenen Zellen, welche im Austritt begriffen sind, wird die sich abrundende Zellenmembran leicht sichtbar. 6. Leucocyten nach dem Durchtritt, welche stets die ursprünglich runde Form annehmen.

Fig. XVII. Schleimhaut des Ductus cysticus vom Menschen.

1. Stratum subepitheliale mit Leucocyten. 2. Cylinderzellen des Ausführungsganges. 3, 4 und 5 zeigen die Durchwanderung der Leucocyten in verschiedenen Stadien, vom Eintritt zwischen die Cylinderepithelien an bis zum Austritt derselben.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 136. Stiftungstages

am 28. März 1895.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgenden Worten zum Gedächtniss zweier Ehrenmitglieder der Akademie:

Der 28. März heute ist der Stiftungstag der k. bayer. Akademie der Wissenschaften, welcher jährlich durch eine öffentliche Festsitzung gefeiert wird. Diese Stiftungsfeier dient herkömmlich dazu, jener unsrer Mitglieder zu gedenken, welche während des abgelaufenen Jahres verstorben sind.

Ich habe zweier verstorbener Ehrenmitglieder zu gedenken.

Adolf Friedrich Graf von Schack.

Am 14. April 1894 starb zu Rom Seine Excellenz Adolf Friedrich Graf von Schack, geboren am 2. August 1815 zu Schwerin, am 15. Juli 1856 von der Gesammt-Akademie zum Ehrenmitgliede gewählt. Der Vorschlag, von unserem verstorbenen Mitgliede Markus Müller ausgehend, lautet wörtlich:

„Als Edelmann, Diplomat und Freund der höchsten Person des Staates nimmt Adolf Friedrich Graf von Schack eine ausgezeichnete sociale Stellung ein, und als Gelehrter und Dichter steht er auf gleicher Stufe mit den ersten Grössen unseres Vaterlandes.

Seine Geschichte der dramatischen Literatur und Kunst Spaniens (3 Bände 1845) ist ein Meisterwerk literarisch-historischer Forschung und zeugt ebenso von tiefen Studien wie von einer seltenen Schärfe und Besonnenheit der Urtheile und einer gediegenen Vollendung des Geschmackes. Daran reiht sich sein spanisches Theater (2 Bände 1845), in welchem er mehrere der spanischen Dramas von Ruiz Alarcon, Cervantes, Lope de Vega und Calderon in deutschem Gewande dem Publikum geschenkt hat, mit einer Gewandtheit der Sprache und Schönheit und Adel des Ausdrucks, die ihn neben die ersten Meister der Uebersetzungskunst stellt. Dasselbe gilt von seiner Uebersetzung der epischen Gedichte des Firdusi, in welcher er ebenso durch gründliche Kenntniss des persischen Idioms, wie durch den feinen poetischen Sinn und Trefflichkeit der Uebertragung glänzt."

Die Akademie trat einstimmig diesem Vorschlage bei.

Adolf Friedrich von Schack hat sein Leben lang der Wissenschaft und der Kunst getreulich gedient. Es liegt nun ein Leben geschlossen vor uns da, welches allen materialistischen Verlockungen widerstrebend stets idealen Zielen geweiht war. Sein Lebensgang ist merkwürdig. Neben seinen juristischen Studien an den Universitäten Bonn, Heidelberg und Berlin (1834 bis 1838) betrieb er eifrig das Studium der europäischen Literaturen und der orientalischen Sprachen, machte in den Ferien Reisen für wissenschaftliche Zwecke, trat dann in die Dienste des Grossherzogs von Mecklenburg und begleitete denselben als Kammerherr und Legationsrath auf seinen Reisen nach Italien und Konstantinopel. Dann wurde er nach Frankfurt am Main zum Bundestage,

wo sein Vater mecklenburgischer Gesandter war, versetzt, und 1849 kam er als Bevollmächtigter seines Souveräns, dann als Geschäftsträger nach Berlin. Von Haus aus reich begütert und schon in einem Alter von 34 Jahren zu einer ehrenvollen diplomatischen Stellung gelangt, lag Herrn von Schack ein weiterer glänzender, genussreicher Lebenslauf vor, den wohl die meisten Menschen gerne weiter gewandelt wären. Aber der junge Adolf Friedrich von Schack verzichtete 1852 auf seine amtliche Stellung und ging als Privatmann nach Spanien, um dort über die Geschichte und Cultur des Landes und der spanischen Araber weiter zu forschen. Er hatte sich dafür durch eingehendes Studium der orientalischen Sprachen, namentlich des Sanskrit, Arabischen und Persischen vorbereitet. Im Jahre 1856 folgte er einer Einladung unseres damaligen Protektors König Maximilian II., nach München überzusiedeln, wo er sich in der Briennerstrasse ein Wohnhaus kaufte, welches später nach den Plänen des Architekten und Bildhauers Lorenz Gedon umgebaut wurde, in welchem Anwesen er auch die von ihm gegründete, berühmte Bildergalerie unterbrachte. Diese Galerie enthält Meisterwerke von damals lebenden, aber vielfach noch verkannten Künstlern (Genelli, Feuerbach, Böcklin etc.) und dazu auch Copien von hervorragenden Werken anerkannter alter Meister (Tizian, Velasquez, Murillo etc.). Diese Schack-Galerie ist zur Zeit eine vielbesuchte Sehenswürdigkeit Münchens. Ihr Gründer vermachte sie letztwillig Seiner Majestät dem Deutschen Kaiser, welcher sie aber in huldvollster Weise nicht nach Berlin verpflanzte, sondern in München beliess. Die Gründung dieser Galerie und die wissenschaftlichen und poetischen Leistungen ihres Gründers veranlassten Seine Majestät, Herrn von Schack in den Grafenstand zu erheben, und veranlassten auch den Magistrat München, ihn zum Ehrenbürger zu ernennen.

Ueber Schacks Bedeutung als Gelehrter hat sich Markus

Müller in dem eben verlesenen Antrage bezeichnend ausgesprochen, und habe ich dem nichts beizufügen; über seine Bedeutung als Dichter theilt mir ein sachverständiges Mitglied unserer Akademie folgendes mit:

„Wie uns Schack in seinen meisterhaften Uebersetzungen die fremde Welt der Inder, Perser und Araber näher gebracht hat, so liebt er es auch in seinen zahlreichen eigenen Dichtungen, uns in die verschiedensten Welttheile, die verschiedensten Zeiten zu versetzen und weitschauenden Blicks die geistige Entwicklung der Menschheit bis zur lebendigen Gegenwart zu verfolgen mit prophetischem Hinweis auf eine kommende Verbrüderung aller Völker. Er ist der Culturdichter im vollen Sinne des Wortes mit all seinen Licht- und Schattenseiten, kein unmittelbar wirkender Lyriker, aber ein tief und vielseitig gebildeter Geist, der erhabene Gedanken und edles Streben in klangvoller Sprache zum Ausdruck bringt und die mannigfaltigsten Kunstformen mit sicherer Meisterschaft beherrscht."

Unsere Akademie wird des Verblichenen stets ehrend gedenken.

Ismail Pascha.

Ein anderes Ehrenmitglied, Ismail Pascha, früher Chediv von Aegypten, geboren am 31. Dezember 1830 zu Kairo, starb jüngst am 2. März 1895 in Konstantinopel und wurde am 12. März in Kairo feierlich bestattet. Er war der erste Muhamedaner, der unserer Akademie angehörte, am 18. Juni 1874 gewählt. Der Vorschlag zu seiner Wahl ging von unserem verstorbenen Mitgliede Franz von Kobell aus und lautet wörtlich: „Der Unterzeichnete erlaubt sich zum Ehrenmitglied der Akademie Seine Hoheit den Vicekönig von Aegypten Ismail Pascha vorzuschlagen. Dieser Herr hat sich durch die liberale Unterstützung der geographischen

Expedition von Baker und Schweinfurt und durch die glänzende Ausrüstung der Rohlf'schen Expedition zur Erforschung der libyschen Wüste wesentliche Verdienste um die Wissenschaft erworben. An letzterer Expedition hat auch unser Mitglied Professor Zittel Theil genommen und die paläontologische Sammlung des Staates ist von ihm durch interessante Erwerbungen bereichert worden. Der Vicekönig hat sehr liberal gestattet, dass die auf der Reise gemachten naturhistorischen Sammlungen überhaupt den betreffenden Sammlungen in Berlin und München einverleibt werden. Es dürfte daher vollkommen gerechtfertigt sein, dass dem hohen Herrn von Seite unserer Akademie ein Zeichen der Anerkennung geboten werde."

Die Akademie trat diesem Vorschlage einstimmig bei.

Ismail Pascha musste bekanntlich von der Regierung zurücktreten. Darüber weiss ich nichts Besseres und Entsprechenderes zu sagen, als was der berühmte Aegyptologe Professor Dr. Georg Ebers, welcher länger in Aegypten weilte und mit Ismail Pascha persönlich verkehrte, uns mitgetheilt hat. „Die verschwenderische Rücksichtslosigkeit, mit der der jüngst verstorbene Chediv Ismail über die reichen Mittel seines Landes verfügte, musste er in der Verbannung büssen. Die Bevorzugung, die den Europäern so deutlich und lange durch ihn zu Theil ward, hatte die national gesinnten Unterthanen gegen ihn aufgebracht, und es mag dahingestellt bleiben, in wie weit ihn die Hoffnung auf Vermehrung seiner Einkünfte und der Wunsch sich in Europa Berücksichtigung und Lob zu erwerben, antrieben, sich als Förderer der Cultur zu bewähren. Jedenfalls besass er Eigenschaften und bethätigte er seinen Geist und seine Thatkraft durch Handlungen und Werke, die es einer wissenschaftlichen Körperschaft, deren Bestrebungen er gelegentlich verständnissvoll und freigebig unterstützt hatte, nahe legen durfte, ihrer Anerkennung auch äusserlich Ausdruck zu geben.

Von seinem Grossvater Mohammed Ali, dem Erneuerer Aegyptens, hatte er den lebhaften, der europäischen Cultur geneigten Geist, von seinem Vater Ibrahim, dem Sieger von Nisibi, wo unser Moltke gegen ihn focht, den unternehmenden Sinn geerbt. Seinen französischen Erziehern verdankte er eine Bildung, die, obwohl sie nicht tief ging, ihm doch gestattete, die Bedeutung und Würde der Wissenschaft zu erkennen. Neue Gedanken und Entwürfe, die man ihm mittheilte und vorlegte, begriff er und verstand es ihnen zu folgen und ihnen das für seine Zwecke Brauchbare zu entnehmen. Darum wurde es auch Herrn von Lesseps leicht, den Chediv Ismail für die unter seinem Vorgänger begonnene Durchstechung der Landenge von Suez zu gewinnen, so viele Millionen sie auch wieder und wieder in Anspruch nahm. Ebenso glückte es dem französischen Alterthumsforscher Auguste Mariette, den Chediv für die Denkmäler aus der Pharaonenzeit zu interessiren und von ihm die Mittel zu Ausgrabungen in grossem Stil, zur Herausgabe von nützlichen Publicationswerken und endlich für die Anlage jenes Antiquitätenmuseums in Kairo zu erlangen, das schon bei Ismails Verjagung seinesgleichen nicht hatte. Als Gerhard Rohlfs und Karl Zittel die Erforschung der libyschen Wüste unternahmen, schenkte er dieser ergebnissreichen Expedition, sowie der früheren von Baker und Schweinfurt nicht nur materielle Unterstützung, sondern auch verständnissvolle Theilnahme. Auch vielen anderen Forschern gewährte er thatkräftige Unterstützung. So dem Astronomen Mahmud Bē (später Pascha) bei seinen der Topographie des alten Alexandrien gewidmeten Arbeiten, und Ernst Haeckel, indem er ihm für seine zoologischen Untersuchungen im Rothen Meere einen Dampfer zur Verfügung stellte. Die Bibliothek im Palast Derb-el-Gamamīz zu Kairo dankt ihm die Entstehung und ihre tüchtige Verwaltung durch deutsche Gelehrte (Dr. Stern und Dr. Spitta). Jetzt steht ihr Dr. Vollers

vor. Herr Dor, ein tüchtiger Schweizer Pädagog, richtete seine Aufmerksamkeit auf das Erziehungswesen des Landes. Mit schöner Duldsamkeit unterstützte der Chediv die Errichtung auch christlicher Schulen und Kirchen. Die Neugestaltung des ägyptischen Medicinal- und Gerichtswesens ging gleichfalls von ihm aus. Was er für die Bewässerung seines Reiches, für den Verkehr durch Anlage von Eisenbahnen und Telegraphen, für die Wohlfahrt der Unterthanen durch die Pflanzung Schatten spendender Bäume in grossartiger Menge that, verdient so gewiss der Erwähnung, wie dass er die Zwangsarbeit aufhob und den Sklavenhandel beschränkte."

Also Segen auch seinem Angedenken!

Der Classensecretär, C. v. Voit, gedenkt der seit dem letzten Stiftungstage gestorbenen Mitglieder der Classe.

Die mathematisch-physikalische Classe hat im verflossenen Jahre zwei ordentliche Mitglieder: Carl Maximilian v. Bauernfeind und Carl v. Haushofer, ferner vier auswärtige Mitglieder: Die Physiker August Kundt und Hermann v. Helmholtz in Berlin, den Botaniker Nathanael Pringsheim in Berlin und den Anatomen Josef Hyrtl in Wien durch den Tod verloren.

Carl Maximilian von Bauernfeind.

Am 3. August vorigen Jahres endete das Leben eines Mannes, der in rastloser fruchtbarer Thätigkeit nur durch eigene Kraft und Tüchtigkeit sich zu angesehenster Stellung emporgearbeitet, die Geodäsie und Ingenieurkunde mächtig gefördert und durch die glückliche Organisation des technischen Unterrichtes seinem Vaterlande die grössten Dienste geleistet hat.

Carl Maximilian Bauernfeind wurde am 28. No-

vember 1818 in dem Städtchen Arzberg im Fichtelgebirge als Sohn eines Schmiedmeisters geboren. Die an Kindern reichen, an Mitteln armen Eltern waren nicht in der Lage den Knaben, dessen besondere Begabung sich früh zeigte, einen regelmässigen Studiengang durchmachen zu lassen. Er wurde in die Lateinschule nach dem benachbarten Wunsiedel geschickt, dann in die Gewerbeschule und die polytechnische Schule nach Nürnberg, woselbst er drei Jahre (von 1836 bis 1838) verblieb. Aber gerade die entgegenstehenden Schwierigkeiten stählten seinen Willen und trieben ihn zu ernster Arbeit.

Er hatte das grosse Glück, dass an der polytechnischen Schule zu Nürnberg damals als Professor der Mathematik und Physik Georg Simon Ohm, gleich bedeutend als Forscher wie als Lehrer, wirkte. Bauernfeind schildert ihn in einer am 28. Juli 1882 gehaltenen Gedächtnissrede als unvergleichlichen Lehrer, an welchem die Jugend einen begeisternden Führer nicht bloss im Bereiche der Mathematik und Physik, sondern des Wissens überhaupt fand, von dessen Geiste Jeder eine innerliche Wirkung verspürte. Ohm war sich klar darüber, dass die gewöhnliche Lehrweise durch Vorträge in den Naturwissenschaften nicht ausreichend sei; er suchte die Schüler in ununterbrochenem lebendigem Verkehr durch Fragen und Uebungen an der Tafel zu selbständigem Denken anzuregen. Bauernfeind stand mit seinem geliebten Lehrer noch länger in Briefwechsel und verkehrte später nach dessen Berufung nach München viel mit ihm.

Auf diese Weise vortrefflich vorbereitet, bezog Bauernfeind (1838) die Universität München, wo damals noch die technischen Beamten, die Architekten, Ingenieure etc. ihre Ausbildung empfingen; er war daselbst während zweier Jahre als Studirender der Industrie inscribirt und hörte mathematische, naturwissenschaftliche und staatswirthschaftliche Vorlesungen.

Hier wurde für sein Leben die Begegnung mit einem hervorragenden, ganz eigenartigen Manne der Technik, mit Josef v. Utzschneider, entscheidend. Dieser „edelste Vaterlandsfreund“, wie ihn die Grabschrift nennt, hatte sich um die Staats- und Volkswirthschaft in Bayern in höchstem Grade verdient gemacht: ihm verdankt man die Reform der Finanzverwaltung, des Steuerkatasters und der Staatsschuldentilgung, ferner die Durchführung einer für die damalige Zeit musterhaften Landesvermessung, die Anbahnung einer rationellen Forst- und Landwirthschaft, die ersten Versuche mit dem Runkelrübenbau während der Continentalsperre, die Cultivirung ausgedehnter Moosflächen, die Verbesserung des Salzbergbaues und des Sudwesens; er machte ferner mit Georg Reichenbach und Josef Fraunhofer München durch Gründung der mathematisch-mechanischen und optischen Institute zur Pflanzstätte für Feinmechanik; und ward nach seinem Rücktritte vom Staatsdienste als Bürgermeister Münchens in uneigennützigster Weise der Begründer einer Industrie der Stadt durch bedeutende Unternehmungen: durch Anlage einer Lederfabrik, einer Tuchfabrik, einer Spiritusfabrik, einer Glashütte, einer ersten grossen Brauerei etc. An diesen merkwürdigen Mann hatten Bauernfeind seine Nürnberger Lehrer empfohlen, der den Werth und das Streben des jungen Mannes alsbald erkannte, ihm die zur Fortsetzung seiner Studien nöthigen Mittel gewährte, ihm Wohnung in seinem Hause in Obergiesing, dem jetzigen Warthofe, gab und ihn bis zu seinem im Jahre 1840 erfolgten Tode ein wahrer väterlicher Freund und Rathgeber blieb.

Utzschneider hatte ein besonderes Geschick die rechten Leute zu finden und sie auf den ihren Talenten passenden Platz zu stellen. So bestimmte er seinen Schützling, sich dem Ingenieurfach zu widmen. Damals (1840) wurde eben der vierte Jahreskurs der hiesigen polytechnischen Schule

in einen, von dem trefflichen Friedrich August Pauli, dem späteren Oberbaudirektor, geleiteten Ingenieurcurs verwandelt, in welchen Bauernfeind eintrat. Schon ein Jahr darauf bestand er die Staatsprüfung für das Ingenieurfach mit Auszeichnung und kam alsbald als Baupraktikant zu der Eisenbahnbaucommission nach Nürnberg und dann zu der Eisenbahnbausektion nach Hof, woselbst er mit den Projectirungsarbeiten und der Bauleitung für die dortigen schwierigen Bahnbauten beschäftigt war.

Diese für seine fernere Laufbahn äusserst nutzbringende praktische Thätigkeit wurde (1844) unterbrochen durch die Einberufung als Hilfslehrer des Ingenieurcurses nach München, an welchem er drei Jahre vorher noch Schüler war. Nebenbei erhielt er (1846) die Stelle eines functionirenden Ingenieurs der Direction der Eisenbahnen. Im Jahre 1849 erfolgte seine Anstellung als zweiter Professor der Ingenieurwissenschaften an der polytechnischen Schule, 1851 die als erster Professor, womit er die Stellung als Bauingenieur wieder aufgab.

Damit begann für Bauernfeind eine durch fast 50 Jahre fortgesetzte fruchtbare Lehrthätigkeit in der gesammten Ingenieurkunde: im Strassen-, Brücken- und Eisenbahnbau, sowie in der Geodäsie; er war ein ganz vorzüglicher, klarer und gewissenhafter Lehrer, dem alle bayerischen Ingenieure ihre Ausbildung verdanken, nicht nur die theoretische, sondern auch die praktische durch den Unterricht in der praktischen Geometrie und im Gebrauche der Messinstrumente. Zu dieser Zeit, wo seine Stellung fest begründet war, begann er auch sich mit wissenschaftlichen Problemen zu befassen. In Folge davon hat ihm (1853) die Erlanger Universität, besonders für seine Arbeit über die Planimeter, den Titel eines Doktors der Philosophie verliehen. Doch wurde er (1858) noch einmal in den praktischen Dienst gerufen durch die Ernennung zum Baurath bei der obersten Baubehörde,

wo er während zehn Jahren das Referat über Eisenbahn- und Brückenbauten hatte.

Mittlerweile war ein wichtiger Abschnitt in dem Leben Bauernfeind's herangekommen. Seit längerer Zeit (1857) befasste man sich in Bayern mit dem Plane einer Neuorganisation der technischen Lehranstalten, aber man konnte über die Principien nicht einig werden. Keine Geringeren wie Georg Reichenbach und Josef Fraunhofer hatten schon im Jahre 1823 eine Denkschrift dem Ministerium vorgelegt, worin sie für alle technischen Studien eine auf wissenschaftlicher Grundlage aufgebaute Hochschule verlangten. Erst der Minister v. Schlör griff diesen Gedanken wieder auf und fand in Bauernfeind einen für die Aufgabe begeisterten, ebenso sachkundigen wie energischen Rathgeber. Nicht eine Anstalt zur empirischen Abrichtung und zur Erlernung gewisser Regeln sollte entstehen, sondern eine Stätte der Wissenschaft, in welcher die Schüler befähigt werden zu denken und in den einzelnen Fällen selbst zu entscheiden, was das Richtige ist. Es stand bei ihm fest, dass die Mathematik und die Naturwissenschaften wie Physik, Mechanik, Chemie, Geognosie, Physiologie etc. ebenfalls zu einer allgemeinen Bildung führen, indem sie die Befähigung geben, in fremde Gebiete mit klarem Blicke zu schauen und deren Beziehungen zu dem eigenen Berufe zu erfassen. Ihm wurde nach manchen Kämpfen die ganze Organisation der neuen Hochschule anvertraut, er wählte mit grossem Geschick die ersten Lehrer derselben aus, und er wurde zum Professor der Ingenieurwissenschaften und der Geodäsie, sowie zum Director während der sechs ersten Jahre ernannt. Als im Jahre 1868 die Hochschule in dem prächtigen Neubau eröffnet wurde, da konnte man sagen, dass ein gelungenes Werk vorliege und dass Bauernfeind sich um dasselbe das grösste Verdienst erworben habe. Im Jahre 1874 erhielt er den Titel und Rang eines Directors der technischen Hoch-

schule, und von 1880 bis 1889 führte er abermals das Amt eines Directors derselben. Solange die technische Hochschule bestehen bleibt, wird man sich dankbar des Mannes erinnern, der das Meiste zu ihrer Gründung und zu ihrem Gedeihen gethan hat.

Noch an einer andern bedeutungsvollen Aufgabe konnte sich der Geodät Bauernfeind betheiligen, an der europäischen Gradmessung. Dieses grossartige wissenschaftliche Unternehmen hatte im Jahre 1861 der k. preuss. Generallieutenant J. J. Baeyer, der Schüler Bessel's, ins Leben gerufen; fast alle Staaten Europas betheiligten sich an demselben, so dass es später zu einer internationalen Erdmessung erweitert wurde. Zur Durchführung der für die Zwecke der europäischen Gradmessung in Bayern vorzunehmenden Arbeiten wurde (1868) eine bayerische Commission, bestehend aus Mitgliedern der math.-phys. Classe der Akademie, gebildet. Bauernfeind wurde ständiger Secretär und Stellvertreter des Vorstandes dieser Commission. Dieselbe sollte darüber wachen, dass alle auf Bayern treffenden Gradmessungsarbeiten nach den Beschlüssen der allgemeinen Conferenzen und der permanenten Commission der europäischen Gradmessung vollzogen werden. Sie hatte zunächst die zur Durchführung der Gradmessung in Bayern nöthigen Arbeiten einzuleiten; Bauernfeind fielen die geometrischen Nivellements erster Ordnung zu, wozu er die Instrumente wählte und die Methoden der Nivellirung, sowie die Berechnung der Resultate angab, eine Arbeit, die ihn bis an seine letzten Lebenstage beschäftigte. Im Jahre 1871 trat er in die aus den bedeutendsten Fachmännern zusammengesetzte permanente Commission ein, in welcher er an der Seite Baeyer's zum Vicepräsidenten gewählt wurde.

Indem wir uns nach diesem Ueberblicke über den Lebensgang Bauernfeind's zu seiner wissenschaftlichen Thätigkeit wenden, muss zur Charakterisirung derselben bemerkt werden,

dass dieselbe sich stets als Bedürfniss für seine praktischen Arbeiten als Geodät und Ingenieur ergab; er verfolgte damit den Zweck, die letzteren zu fördern und genauer zu gestalten.

Eine seiner ersten Veröffentlichungen (1846) war der Beitrag zur Theorie der Brückengewölbe. Pauli hatte bei seinen Vorträgen im Ingenieurcurs eine wahrscheinlich aus englischen Quellen geschöpfte höchst einfache graphische Behandlung der in einem Gewölbe thätigen Kräfte mitgetheilt; an Stelle dieses graphischen Verfahrens setzte nun Bauernfeind das analytische und erweiterte so die Gewölbetheorie. Die erste von Pauli construirte Fachwerkbrücke über die Günz entsprach nicht ganz den Anforderungen, was Bauernfeind (1856) veranlasste ein anderes Trägersystem zu berechnen, wornach die von Gerber ausgeführte Construction bei der Grosshesseloher Brücke zur erstmaligen Anwendung kam.

Das von ihm (1851) angegebene Prismenkreuz, ein neues Messinstrument zum Abmessen von Winkeln für Ingenieure und Geometer, hat eine weite Verbreitung gefunden; indem er statt der Spiegel Glasprismen als reflectirende Flächen anwendete, gelang es ihm in Folge der Durchsichtigkeit der letzteren die Bilder zweier Gegenstände in grösserer Ausdehnung zur Deckung zu bringen, als es bei den Spiegeln möglich ist, und so eine genauere Messung zu erzielen.

Seine Besprechung der drei damals (1853) existirenden, aber noch wenig bekannten Planimeter von Ernst, Welti und Hansen hat zur Anwendung dieser Instrumente in der Praxis viel beigetragen.

Bauernfeind's Elemente der Vermessungskunde, ein Lehrbuch der praktischen Geometrie in zwei Bänden (1856 in erster, 1890 in siebenter Auflage erschienen) sind wohl sein bedeutungsvollstes Werk, welches zu seiner Zeit nur von ihm bearbeitet werden konnte. Dieses ungemein klar und verständlich geschriebene, von wissenschaftlichem Geiste erfüllte Lehrbuch hat durch die systematische Zusammenfassung der

damaligen Kenntnisse die Erlernung der Methoden der Vermessungskunde ungemein erleichtert.

Auch die von Bauernfeind herausgegebenen Vorlageblätter zur Brückenbaukunde, zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde und zur Wasserbaukunde haben für die Ausbildung des Ingenieurs grossen Nutzen gebracht.

Die seit Anfang des Jahrhunderts in Bayern vorgenommene Landesvermessung hatte zunächst eine nach wissenschaftlichen Principien ausgeführte Triangulation ausgeführt, welche für jene Zeit als musterhaft anerkannt war: Schiegg hatte sich an der Ausführung betheiligt, Soldner die Methoden der Berechnung geliefert und Utzschneider die Einrichtungen gemacht; die besten, aus den Werkstätten von Reichenbach und Ertel und von Fraunhofer hervorgegangenen geodätischen und astronomischen Instrumente waren zur Verwendung gelangt. In dem von der k. b. Steuerkatastercommission und dem k. b. topographischen Bureau (1873) herausgegebenen grossen Werke: Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage prüfte Bauernfeind, ob diese Triangulirung auch den höheren Anforderungen einer Gradmessung genüge, wobei sich zeigte, dass dieselbe, nach Ergänzung des Hauptdreiecknetzes durch eine Anzahl neuer Winkelmessungen und nach Umrechnung der Resultate eines Theils des Hauptnetzes sehr wohl der europäischen Gradmessung eingefügt werden durfte.

In Verbindung mit der europäischen Gradmessung wurden ferner in Bayern ausgedehnte Präcisions-Nivellements unter Bauernfeind's Oberleitung durch die Assistenten der bayerischen Gradmessungscommission ausgeführt. Diese Nivellements längs der Eisenbahnen und Landstrassen, durch welche die Meeresspiegel an den Küsten Europas verbunden und in allen Ländern eine grosse Anzahl genau nivellirter Marken als Grundlagen für weitere Höhenmessungen zu technischen und wissenschaftlichen Zwecken geschaffen werden

sollten, gehören zu dem Besten, was die neuere Zeit auf diesem Gebiete geleistet hat.

Für geodätische Höhenbestimmungen benützt man bekanntlich das Barometer und die trigonometrische Messung; die letztere ist genauer, die erstere aber bequemer. Die barometrischen Bestimmungen erwiesen sich durch noch unbekannte Einflüsse als unsicher. Dies führte Bauernfeind dazu, umfassende Untersuchungen über die Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen anzustellen. Er liess zu dem Zwecke (1857) den grossen Miesing genau geometrisch nivelliren und dann an fünf in Höhenabständen von 270 m befindlichen Punkten von 10 Schülern gleichzeitig Beobachtungen über die Aenderungen des Druckes, der Temperatur und des Wassergehaltes der Luft mit der Höhe machen.

Daran schlossen sich seine beiden Untersuchungen über die atmosphärische Strahlenbrechung (1864 und 1866) an. In der ersteren über die astronomische Strahlenbrechung stellte er die Bessel'schen mittleren Refractionen bis zu 90° Zenithdistanz fest; in der zweiten über die terrestrische Strahlenbrechung ermittelte er auf theoretischem Wege die Abnahme der Coefficienten derselben mit der Höhe als eine nothwendige Folge der früher aus seinen barometrischen Messungen aufgestellten Luftdichtigkeitsformel. Später (1877) wurden auf Veranlassung der Commission der europäischen Gradmessung noch weitere Beobachtungen der terrestrischen Refraction im Fichtelgebirge und dann zwischen dem Schliersee und dem Chiemsee unter seiner Leitung gemacht.

Aus allen diesen Beobachtungen erkannte er in der Wärmestrahlung des Erdbodens die Ursache, warum bei den barometrischen Messungen tägliche Perioden auftreten, indem Mittags grössere, Morgens und Abends kleinere Höhen als die wirklichen erhalten werden. Er entwickelte ferner Gleichungen für die die verschieden dichten Schichten der Atmosphäre durchdringenden Lichtstrahlen und wies auch

für die trigonometrische Höhenmessung einen Einfluss der Wärmestrahlung des Erdbodens in täglichen Perioden nach. Für die Geodäsie, die barometrischen Höhenbestimmungen, sowie auch für die Meteorologie waren diese Arbeiten Bauernfeind's von Belang; er hat sie für seine bedeutendste Leistung gehalten.

Es ist, wie man ersieht, nicht die reine Mathematik oder die Physik, welche Bauernfeind durch neue Erkenntnisse bereicherte; er hat vielmehr durch die Anwendung derselben für die wissenschaftliche Ausbildung der Geodäsie und Ingenieurkunde Bedeutsames geleistet und ist dadurch, sowie durch die mit Geschick organisirten und geleiteten gemeinschaftlichen Messungen seiner Schüler zu einem der angesehensten Vertreter in seinem Fache geworden. Das hohe Ansehen und die Achtung, welche er sich allseitig errungen hat, zeigte sich besonders bei der Feier seines 70. Geburtstages am 28. November 1888, den er noch in voller Rüstigkeit im Amte beging.

So ist der aus dem Volke hervorgegangene Sohn des Schmiedes durch eigene Kraft seines Glückes Schmied geworden. Der mächtige Kopf mit den ausdrucksvollen scharfen Zügen liess alsbald den bedeutenden Mann von festem Charakter erkennen, welcher genau wusste, was er wollte, und mit umsichtiger Klugheit durchsetzte, was er anstrebte. Eine vornehme Erscheinung von gemessenem Wesen verlangte er Beachtung seiner Stellung und zeigte, dass er zu herrschen gewohnt war.

Ein Jahr nach seinem 70. Geburtstage legte er die Geschäfte eines Directors der technischen Hochschule nieder, da sich Symptome des Nachlassens der Kräfte bemerklich machten; 1890 trat er auch vom Lehramte zurück. Es stellten sich die Anfänge eines schweren Leidens ein, dessen Qualen er mit Heldenmuth ertrug. Klaren Geistes nahm er Abschied von seiner Familie und seinen Freunden mit dem Bewusstsein sein Leben gut angewendet zu haben.

Karl von Haushofer.

Die mathematisch-physikalische Classe beklagt den allzufrühen Tod eines verdienten, reich veranlagten und höchst liebenswürdigen Collegen, welcher wissenschaftliche und künstlerische Befähigung in gleichem Grade in sich vereinigte.

Karl Haushofer erblickte am 28. April 1839 zu München als Sohn des Landschaftsmalers Max Haushofer das Licht der Welt. Letzterer gehörte zu denjenigen hiesigen Malern, welche damals begannen im bayerischen Gebirge Studien nach der Natur zu machen; es war eine idyllische Zeit voll Frohsinns und freudigen Schaffens. In der Sorge um seine Familie verliess er 1844 mit schwerem Herzen die Heimath, um einen Ruf als Professor an die Kunstakademie zu Prag anzunehmen, woselbst der Sohn die Jugendjahre verbrachte.

Letzterer hatte von dem Vater das Verständniss für die Schönheit der Natur und das Talent für die künstlerische Darstellung geerbt. Frühzeitig fing er an zu zeichnen und zu malen, und zwar Alles, was ihm vorkam, Landschaftliches und Figürliches. Dieser aufs Feinste ausgebildete Farben- und Formensinn und das Talent des Zeichnens kam ihm später bei seinen wissenschaftlichen Arbeiten, bei den von ihm entworfenen geologischen Wandtafeln und bei den Vorlesungen sehr zu Statten. Die Liebe zur Naturschönheit wurde gepflegt und entwickelt durch den Aufenthalt an dem Chiemsee, wo die Eltern Haushofer's, an beständigem Heimweh nach der bayerischen Heimath leidend, alljährlich zwei Sommermonate zubrachten. Die Bilder jener Landschaft: See, Wald und Hochgebirge senkten sich tief in die Seele des Knaben und noch in späteren Jahren suchte er dorten, bis kurz vor seinem Tode, Erholung nach den Mühen der Arbeit.

In Prag besuchte er das deutsche Gymnasium auf der Kleinseite (1849—1856), an welchem einsichtsvolle Lehrer

wirkten. Auch die Naturwissenschaften wurden daselbst eifrig gepflegt: Physik, Botanik, Zoologie und Mineralogie waren obligate Lehrgegenstände. Der junge Haushofer nahm das grösste Interesse daran und beschäftigte sich auch zu Hause mit physikalischen und chemischen Experimenten. Besondere Neigung brachte er der Mineralogie entgegen; der Vater besass eine nicht unbedeutende Mineraliensammlung, welche dem Sohn zur Anregung diente, so dass er schon als Gymnasiast jedes ihm vorkommende Mineral bestimmen lernte.

Nur ungern hatte sich der Vater von seinen beiden Söhnen (1856) getrennt, um dieselben in Bayern das Gymnasium absolviren zu lassen, da er wünschte, dass sie in der alten Heimath ihren künftigen Lebensweg suchen sollten, nicht in Böhmen, wo schon damals die Nationalitätenfrage das Dasein immer unerquicklicher gestaltete. So absolvirte der junge Haushofer (1857) das Maximilians-Gymnasium zu München und trat dann an die hiesige Universität über.

Es war fast selbstverständlich, dass die Liebe zur Natur und die schon erlangten Kenntnisse ihn bestimmten, sich den Naturwissenschaften, insbesondere der Mineralogie und Geognosie zuzuwenden. Nachdem er noch ein Semester in Prag zugebracht hatte, ging er (1859) an die sächsische Bergakademie zu Freiberg. Der Berghauptmann v. Beust war damals der Leiter dieser in höchstem Ansehen stehenden Anstalt, an welcher Studirende aus allen Welttheilen sich zusammenfanden; unter der Führung des alten Weishaupt wurden berg- und hüttenmännische Studien neben Chemie und Mineralogie betrieben.

Nach Vollendung der Freiberger Studien musste er sich entscheiden, ob er der Theorie oder dem praktischen Bergwesen sich zuwenden sollte. Namentlich auf eine Anregung aus den Kreisen von Prager Grossindustriellen hin und auch in der Hoffnung bälder zu einem selbständigen

Erwerb zu gelangen, entschloss er sich dazu, sich dem Eisenhüttenwesen zu widmen. Er trat (1861) in eines der grössten böhmischen Eisenhüttenwerke, in die Hermannshütte bei Stab nächst Pilsen, ein, um mit dem einfachsten Arbeiter die harte Arbeit bei der Gluth des Puddelofens zu theilen. Obwohl er bald zum Walzmeister und Betriebsassistent vorrückte, war es dem wissensdurstigen, feinfühlenden jungen Manne nicht möglich eine solche Beschäftigung und die Aufsicht über 400 Arbeiter weiter zu führen. Todmüde, mit Kohlenstaub bedeckt und häufig mit Brandwunden an den Händen von der Arbeit nach Hause kommend, vermochte er nicht mehr ein Buch zu lesen und sich weiter zu bilden.

Der Vater war sehr bestürzt, als er bei einem Besuche der Hütte eine gewisse Verwahrlosung des Sohnes bemerkte; er drang in ihn, die aufreibende praktische Laufbahn und die schon erlangte gute Stellung zu verlassen und zu der Wissenschaft zurückzukehren. Die in der Hütte erworbenen Erfahrungen waren jedoch für ihn nicht verloren; er konnte sie für seine späteren Vorlesungen an der technischen Hochschule gut verwerthen.

Er kam wieder an die Universität München, hörte Vorlesungen bei Liebig und Jolly, und arbeitete namentlich bei Kobell, welcher ihn als Assistenten aufnahm und den ihm in seinem ganzen Wesen sympathischen und in vielen Stücken gleichgesinnten jungen Forscher lieb gewann; er blieb ihm ein allzeit wohlwollender Gönner und Freund.

Im Jahre 1864 löste Haushofer eine von der philosophischen Facultät gestellte Preisfrage physikalischen Inhalts: „Untersuchungen über die bei Auflösung von Salzen in Wasser eintretenden Temperatur-Erniedrigungen“. Die Aufgabe war von Jolly gestellt und in seinem Laboratorium bearbeitet worden. Nun promovirte Haushofer, habilitirte sich (1865) als Privatdozent an der Universität für das Fach der Mineralogie, und wurde, als die technische Hochschule

(1868) dahier gegründet wurde, Professor für Mineralogie und Eisenhüttenkunde an derselben. Als solcher hatte er die mineralogische und hüttenmännische Sammlung und das mineralogische Laboratorium einzurichten. Er war ein vorzüglicher, pflichtgetreuer Lehrer, befähigt durch ausgebreitete theoretische und praktische Kenntnisse in seinem Fache.

Durch diese seine Eigenschaften und durch sein einnehmendes Wesen erwarb er sich bald das Vertrauen seiner Collegen, die ihn wiederholt zum Vorstande der chemisch-technischen Abtheilung erwählten. Und als im Jahre 1889 der Geh. Rath v. Bauernfeind das Directorium der technischen Hochschule niederlegte, kam Haushofer an seine Stelle, welche er bis zu seinem Lebensende behielt. Er hat die in ihn gesetzten Erwartungen erfüllt; als ein gerechter, friedliebender, umsichtiger Vorstand hat er sein schwieriges Amt verwaltet, nur das Wohl der Anstalt berücksichtigend.

Die nicht sehr zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten Haushofer's zeichnen sich durch feine Beobachtung aus.[1])

In seiner Habilitationsschrift (1865) beschäftigte er sich mit den regelmässigen Vertiefungen, welche durch Aetzung mit Säuren auf den Flächen des Kalkspaths entstehen, und den durch Brewster entdeckten Lichtfiguren, welche derartige geätzte Platten hervorbringen. Nachdem er in den folgenden Jahren verschiedene Mineralanalysen und die trefflichen „Hilfstabellen zur Bestimmung der Gesteine" veröffentlicht hatte, wandte er im Jahre 1873 sein Interesse der schwierigen Frage der chemischen Constitution der natürlichen Silikate zu. In einer Abhandlung in den Annalen der Chemie und in einer besonderen Schrift (1874) versuchte er, die modernen chemischen Anschauungen auf die in der Natur vorkommenden kieselsauren Verbindungen anzuwenden und für

---

1) Die Notizen über Haushofer's wissenschaftliche Thätigkeit verdanke ich der Güte des Herrn Collegen Groth.

dieselben Constitutionsformeln aufzustellen, welche den genetischen Beziehungen derselben Rechnung tragen. Da diese letzteren die einzige thatsächliche Grundlage einer solchen Aufstellung bilden, so können die so erhaltenen Formeln nicht denjenigen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzen, welche den Formeln von organischen Verbindungen zukommt, die entweder durch Synthese aus constitutionell bekannten Körpern gewonnen oder durch allmählichen Abbau in einfachere Verbindungen zerlegt werden können. Dazu kommt, dass die damalige Kenntniss der empirischen Zusammensetzung der natürlichen Silikate noch vielfach eine ungenügende war und in zahlreichen Fällen noch heute nicht zu einem Versuche, auf die Constitution derselben zu schliessen, berechtigt. Immerhin finden sich in Haushofer's Zusammenstellungen, welche er selbst nur als einen „Versuch" bezeichnet, manche Auffassungen, die auch jetzt noch als richtig anerkannt werden müssen.

Auf dem Gebiete der Krystallographie veröffentlichte Haushofer eine Reihe kleinerer Mittheilungen, meist Untersuchungen über die Krystallformen organischer Substanzen, theils in der Zeitschrift für Krystallographie, theils in den Arbeiten der Chemiker, welche jene Körper dargestellt hatten, seit dem Jahre 1877 bis zu seiner letzten Erkrankung.

Daneben gingen her Versuche über das Verhalten des Dolomits gegen Säuren, besonders aber seit 1880 Studien über die mikroskopischen Krystallformen in Niederschlägen. Der Gedanke, die Gegenwart gewisser Elemente durch mikroskopische Beobachtung der Krystallform von Verbindungen zu erkennen, war zuerst von einigen Petrographen zu mikroskopischen Reactionen auf Bestandtheile der Mineralien in Gesteinen benutzt worden. Haushofer wandte denselben nun als Hülfsmittel der qualitativen chemischen Analyse auf eine Reihe von Stoffen an, für welche es an empfindlichen Reactionen fehlt, und zeigte, wie man auf diesem Wege in

vielen Fällen, selbst bei sehr geringen Mengen verfügbarer Substanz noch den einen oder anderen darin enthaltenen Bestandtheil sicher nachweisen könne. Namentlich bei den sogenannten seltenen Erden ist durch ihn die mikroskopische Methode ein wichtiges Hülfsmittel bei der chemischen Analyse geworden. Eine systematische Zusammenstellung der mikroskopischen Reactionen, als Anleitung zur Erkennung verschiedener Elemente und Verbindungen unter dem Mikroskope und als ein Supplement zu den Methoden der qualitativen Analyse, gab er im Jahre 1885 heraus; auch führte er zahlreiche junge Chemiker durch ein von ihm abgehaltenes Practicum in diese Methode ein.

Seine rege Theilnahme an dem deutschen und österreichischen Alpenverein, zuerst als Redacteur der Vereinszeitschrift, dann als Präsident der Section München, hat auch der Wissenschaft Nutzen gebracht, denn er war stets bemüht, dem Verein wissenschaftliches Interesse zu verleihen, die Veröffentlichungen in der Zeitschrift gediegen zu gestalten und die bildliche Ausstattung derselben zu veredeln: seine Gebirgslandschaften zeichnen sich durch die scharfe Charakteristik der Bergprofile und seine Hochgebirgskarten durch ein besonderes landschaftliches Verständniss aus. Er wird auch in der Geschichte der Erschliessung der Ostalpen genannt als einer der ersten, welche die Zillerthaler Eispässe begingen, zu einer Zeit, wo das Führerwesen und der Wegbau noch in den Anfängen waren.

Sowie in der Natur suchte er auch im Leben das Rechte und Schöne. Er war ein ideal denkender Mensch, der höhere Ziele erstrebte und seinen Gedanken und Gefühlen auch in poetischer Form Ausdruck zu geben wusste.

Der im Jahre 1890 erfolgte Tod seiner geliebten Gattin wirkte auf den vorher so kräftigen Mann erschütternd ein; zwei Jahre darnach hatte er einen heftigen Anfall von In-

fluenza, von welchem er sich nicht mehr erholen konnte. Er starb nach langem Leiden am 8. Januar 1895, betrauert von Allen, welche seine edlen Eigenschaften gekannt haben.

August Kundt.

Die Physik hat in den letzten Jahren durch das Ableben ihrer hervorragendsten Vertreter in Deutschland die schmerzlichsten Verluste erlitten; nach dem viel betrauerten Heinrich Hertz ist August Kundt und nach diesem Hermann Helmholtz im Zeitraum von 9 Monaten gefolgt.

August Kundt ist am 21. Mai 1894 in vollem Schaffen, erst 54 Jahre alt, gestorben. Ein Schüler von Magnus ist er durch sein Talent in kurzer Zeit einer der ersten Physiker geworden; an den Hochschulen von Zürich, Würzburg, Strassburg und Berlin hat er als unübertrefflicher Lehrer, der eine überaus grosse Zahl wissenschaftlich thätiger Schüler in seinem Laboratorium vereinigte, und als hervorragender Forscher gewirkt.

Von seltener Frische des Geistes und unverwüstlicher Arbeitskraft war er ein von Wenigen erreichter Meister im Experiment, der mit ungewöhnlichem Geschick und Scharfsinn die Mittel fand, die schwierigsten Aufgaben durch den Versuch zu lösen, wodurch es ihm gelang, auf den verschiedensten Gebieten die Physik mit vielen wichtigen Thatsachen und Erkenntnissen zu bereichern. Er gehörte nicht zu den eigentlichen mathematischen Physikern, aber er ging bei seinen Arbeiten zumeist mit feinem Verständniss für die vorliegenden Fragen von theoretischen Betrachtungen aus.

Bei seinen ersten, auf dem Gebiete der Akustik sich bewegenden Arbeiten, gelang es ihm, eine neue höchst sinnreiche Methode der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zu finden, deren Anwendung ihn zu bedeutungsvollen Aufschlüssen führte. An seine Untersuchungen über die

Doppelbrechung des Lichtes in tönenden Stäben hatte sich ein Versuch über die Uebertragung der Bewegung longitudinal schwingender Röhren auf hineingesteckte Körper, sowie auf die Luft in denselben angeschlossen; es zeigte sich dabei die auffallende Erscheinung, dass an der Innenfläche der Glasröhre vertheilter feiner Staub sich in bestimmten Figuren, den Knotenpunkten stehender Schwingungen der eingeschlossenen Luft, anordnet, wenn man die an beiden Enden verschlossene Röhre durch Reiben in longitudinale Schwingungen versetzt. Daraus war er nun im Stande in einfachster und genauester Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen in den in der Röhre befindlichen Gasen und Dämpfen, sowie auch in festen Körpern zu bestimmen. Indem er diese Methode immer mehr vervollkommnete und verschiedene longitudinal schwingende Körper unter mannigfaltigen Bedingungen anwandte, ergaben sich ihm Resultate von allgemeiner Bedeutung, die auch zu dem chemischen Verhalten der Stoffe in Beziehung zu bringen waren. Hierher gehören auch seine Versuche über die Klangfiguren in Orgelpfeifen, über die Schwingungsform tönender Platten, die Erzeugung von Tönen durch Flammen, die Schwingungen von rechteckigen Luftplatten.

Nach diesen akustischen Studien ging er zu optischen Fragen über. Er war auf den Gedanken gekommen, dass Metalle und metallisch glänzende Körper Unregelmässigkeiten in der Brechung des Lichtes zeigen müssten. Durch einen genialen Kunstgriff besiegte er die der Beobachtung fast undurchsichtiger fester Körper und Lösungen entgegenstehenden Schwierigkeiten und that dar, dass in der That eine Anzahl von Lösungen von Stoffen, welche im festen Zustande Oberflächenfarben besitzen, anomale Dispersion zeigen.

In einer für die kinetische Gastheorie höchst folgereichen mit seinem Schüler K. Warburg ausgeführten Untersuchung bestimmte er die Reibung und Wärmeleitung der Gase und

die specifische Wärme des Quecksilberdampfes. Es war nämlich die Frage zu entscheiden, ob im Quecksilberdampf wie bei anderen Gasen mehrere Atome zu einem Molekül vereinigt sind oder ob es, wie unser College v. Baeyer vermuthete, ein einatomiges Gas sei. In letzterem Falle musste ein bestimmter Quotient der Wärmecapacität bei constanter Temperatur und constantem Druck sich ergeben, der aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich bestimmen liess. Dieser Quotient wurde nun auch wirklich durch den Versuch gefunden.

Mit Hilfe des Lichtenberg'schen Pulvers untersuchte er die elektrischen Erscheinungen an Krystallen, die Thermo-, Actino- und Piëzo-Elektrizität derselben. Es folgte der Nachweis der elektro-magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in Gasen, z. B. im Schwefelkohlenstoffdampf, in der Luft, dem Sauerstoff, dem Kohlenoxydgas und Sumpfgas; und dann auch im Eisen, Nickel und Kobalt, indem er den Durchgang des polarisirten Lichtes durch dünne durchsichtige Schichten dieser Metalle, welche er starken elektrischen Strömen aussetzte, beobachtete. Ferner die Entdeckung der Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten, und die Untersuchung über die Doppelbrechung elektrisirter Flüssigkeiten.

Die Kunst der Darstellung äusserst dünner durchsichtiger Ueberzüge von Metallen auf Glasplatten benützte er in seiner letzten hervorragenden Arbeit zur ersten directen Bestimmung der Brechungsexponenten der Metalle.

Kundt's Name wird sich stets an die von ihm durch seine Experimentirkunst erschlossenen Gebiete der Physik knüpfen.

Nathanael Pringsheim.

Der am 6. Oktober 1894 zu Berlin im 71. Lebensjahre gestorbene Botaniker Nathanael Pringsheim war einer der ältesten Vertreter der durch Alexander Braun, Schleiden, Nägeli u. A. begründeten pflanzenphysiologischen Richtung, dem die Botanik vielfache Aufschlüsse über den Bau und das Leben der Pflanzenzellen verdankt; vor Allem sind es seine meisterhaften Untersuchungen der mikroskopischen Algen, womit er seinen Ruhm begründet hat.

Pringsheim widmete sich, angeregt durch Alexander Braun, frühe der Botanik zu, habilitirte sich an der Berliner Universität, wurde bald in Folge seiner Algenstudien auf Ehrenberg's Antrag in die dortige Akademie der Wissenschaften aufgenommen, folgte aber einem Rufe nach Jena als Nachfolger Schleiden's. In Jena gründete er das erste gut eingerichtete pflanzenphysiologische Institut, in welchem zahlreiche Schüler unter seiner Führung wissenschaftlich thätig waren. Er gab jedoch nach einigen Jahren diese Professur wieder auf und siedelte nach Berlin über, um als unabhängiger Mann und Privatgelehrter ungestört ganz der Wissenschaft leben zu können. Mit den reichen ihm zu Gebote stehenden Mitteln errichtete er daselbst abermals ein Laboratorium, worin er freigebig seine Schule aufnahm.

Er begann die lebenden Pflanzenzellen ihrem Bau und ihrer Entwicklung nach unter dem Mikroskope genau zu beobachten, wobei sich neue Auffassungen über das Protoplasma der Zellen und seine Beziehungen zur Membran, die man früher als das Wesentliche der Zelle angesehen hatte, ergaben. Er wurde dadurch zum Studium der mikroskopischen Algen geführt, deren gründliche Durchforschung wohl seine grösste Leistung ist. Er war der erste, der diese interessante Gruppe von niederen Pflanzen, welche die wichtigsten Aufschlüsse über allgemeine Fragen der Morphologie,

Physiologie und Systematik gegeben hat, aus dem Chaos vereinzelter und unvermittelter Beobachtungen zu erlösen angefangen hat, indem er mit unvergleichlicher Ausdauer die winzigen Pflanzen mit dem Mikroskop verfolgte, bis er ihre Geschichte erforscht hatte. Er ist es gewesen, der an ihnen (an der grünen Süsswasseralge Vaucheria terrestris und an Oedogonium) im Jahre 1855 zuerst den Befruchtungsact bei Pflanzen, als geschlechtliche Fortpflanzung und Zeugung, wirklich beobachtete, indem vor seinen Augen die männlichen Spermatozoen sich mit dem frei gelegten Inhalte der weiblichen Eizelle vereinigten und somit beide Theile sich an der Bildung des befruchteten Embryo betheiligten, während man früher die Befruchtung als eine Contactwirkung oder als Diffusion von gelösten Substanzen ansah; ein Jahr vorher war beim Thier (Frosch und Kaninchen) von de Bary das Eindringen der Spermatozoen in das Ei nachgewiesen worden. Pringsheim zeigte ferner dabei, wie bei den Algen geschlechtliche und ungeschlechtliche Fortpflanzung regelmässig mit einander abwechseln und wie die Species von der sexuell gebildeten Spore aus durch eine Reihe von Wachsthumsprocessen und geschlechtslosen Vermehrungen in gesetzmässigem Turnus zu dem nämlichen Ausgangspunkte zurückkehrt. Indem er so von einzelnen dieser Pflanzen eine ausführliche von Zelle zu Zelle fortführende Wachsthumsgeschichte und Entwicklung gab, wurde er zur Bildung natürlicher systematischer Abtheilungen in dem Gewirre räthselhafter Formen geführt, zur Aufstellung bestimmter Arten in diesen Gruppen, welche man bis dahin meist nur nur nach der Grösse der Zellen unterschieden hatte. Nur die in dieser Weise beobachteten mikroskopischen Algen können jetzt als wissenschaftlich erkannt gelten; sie erheben sich wie Inseln aus dem Meere der übrigen noch unbekannten Formen.

Er machte ferner zuerst die auffallende Wahrnehmung,

wie gewisse niedere parasitische Pilze in das Innere gesunder unverletzter Pflanzen eindringen, sich in letzteren weiter entwickeln und verbreiten, sodass sie durch den Eindringling allmählich erkranken und absterben; es ist dies ein Vorgang, der später manche Pflanzenkrankheiten erkennen liess und besonders durch den weiteren Nachweis des Entstehens epidemischer Erkrankungen des Menschen durch in ihn gelangte Spaltpilze von Bedeutung ward.

Von den weiteren Arbeiten Pringsheim's mögen nur einige der wichtigeren zur Charakterisirung seiner Thätigkeit noch Erwähnung finden: seine Untersuchung über die Entwicklung und die Dauerschwärmer des sogenannten Wassernetzes, über die Vorkeimfäden oder die Protonemen der Armleuchtergewächse, über die Keimung und den Aufbau der zierlichen Wasserfarn, über die Embryobildung der Gefässkryptogamen, über die Morphologie der Utricularia, deren Schläuche er auf Schwärmsporen zurückführte, über die männlichen Pflanzen und Schwärmsporen der Gattung Bryopsis.

Von grundlegender Bedeutung ist seine Arbeit über die Paarung der Schwärmsporen, in welcher er die Copulation der Schwärmsporen von Paudorina beschrieb und als morphologische Grundform der Zeugung im Pflanzenreiche darthat.

In mehreren Beiträgen zur Morphologie, zum Befruchtungsakt und zur Systematik der Saprolegnieen wies er die Copulationswarzen der Oogonien und die Copulation der Befruchtungsschläuche der Antheridien mit ersteren nach; auch dass bei ihnen häufig eine parthenogenetische Entwicklung der Oosporen unbefruchteter Oogonien stattfindet.

Die Abhandlung über den Gang der morphologischen Differenzirung in der Sphacelarienreihe bringt eine Darstellung des von den niederen Gattungen derselben zu den höheren fortschreitenden morphologischen Aufbaues in den Vegetations- und Reproduktionsorganen.

Von Wichtigkeit sind ferner die umfangreichen Untersuchungen über das Chlorophyll, in welchen er das spektroskopische Verhalten desselben, sowie die Einwirkung des directen Sonnenlichts auf dasselbe prüfte. Er sah in diesem grünen Farbstoff ein Athemorgan und ein Schutzorgan des Protoplasmas gegen die Wirkung des Lichtes.

Von grossem Interesse war der Nachweis, dass die Zellen der Mooskapseln, sowie die ihres Stieles unmittelbar zu den fadenförmigen Vorkeimen und zu den beblätterten Moospflanzen auswachsen können, wobei also die generative Sporenbildung übersprungen wird. Er hat daran später wichtige allgemeine Betrachtungen über den Generationswechsel der Thallophyten und seinen Anschluss an den Generationswechsel der Moose geknüpft.

Endlich hat er über die Absonderung von Kalk an gewissen Pflanzen, z. B. den Charaarten berichtet; da aus wässrigen Lösungen von kohlensaurem Kalk diese Ausscheidung nicht stattfindet, so musste sie durch die Lebensthätigkeit jener Gewächse bedingt sein.

Ein grosses Verdienst erwarb sich Pringsheim durch die 1858 erfolgte Gründung der Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik, welche er bis zu seinem Tode leitete; ebenso durch die Gründung der deutschen botanischen Gesellschaft, deren ständiger Präsident er war.

Pringsheim hat wesentlich dazu beigetragen, der Botanik ihre heutige Gestaltung zu geben. Immer sind es Fragen von allgemeiner Bedeutung, welche er durch scharfe Beobachtung und kritische Betrachtung zu lösen unternahm; seine Arbeiten sind dauernde Fundamente für die Wissenschaft geworden.

Josef Hyrtl.

Mit Josef **Hyrtl**, welcher am 17. Juli 1894 im 83. Lebensjahre auf seinem Landgute zu Perchtoldsdorf bei Wien gestorben ist, ist der letzte Vertreter der berühmten Wiener medicinischen Schule dahingegangen. Er war einer der erfahrensten Anatomen seiner Zeit und ein unübertroffener, seine Schüler begeisternder Lehrer. Schon während seines Studiums an der Wiener Universität hatte er eine Vorliebe für die Formen der thierischen Organisation; er zeichnete sich durch eine seltene Geschicklichkeit in der Präparation der Theile aus, sodass sein Lehrer, der bekannte Anatom Berres, ihn zu seinem Prosektor machte. Bald nach seiner Promotion wurde der 26 jährige Gelehrte als Professor der Anatomie an die Prager Universität gerufen und erhielt dann nach dem Tode von Berres dessen Stelle in Wien, wo er bis zu seiner Emeritirung thätig war und in höchsten Ehren stand.

Hyrtl besass eine umfassende allgemeine Bildung, er war ein geistvoller origineller Mann, schrieb ein klassisches Latein und sprach gewandt viele neuere Sprachen; in der Literatur und Geschichte der Medicin war er wie Wenige bewandert.

Als feinsinniger Beobachter hat er die fast abgeschlossen erscheinende Anatomie des Menschen um eine grosse Anzahl neuer Thatsachen bereichert, besonders aber die vergleichende Anatomie, welche er mitbegründen half und in der seine zahlreichen Beiträge sich in ihrer Bedeutung nur mit denen von Johannes Müller vergleichen lassen.

Von ganz besonderer Wirkung für die Ausbreitung anatomischer Kenntnisse sind seine klassischen Lehrbücher geworden: das Lehrbuch der Anatomie des Menschen, welches 23 Auflagen erlebte und sein Lehrbuch der topographischen Anatomie. Es war in denselben nichts mehr von der gewöhnlichen trockenen Aufzählung der Theile zu bemerken,

es sind vielmehr darin die Formen in klarster plastischer Darstellung zu einem lebendigen Ganzen verbunden, das durch die Verwebung mit historischen Daten, sowie durch die Hervorhebung der physiologischen Bedeutung das lebhafte Interesse des Lesers erweckt.

Er war ein Meister in der anatomischen Technik und noch jetzt werden seine Präparate, namentlich seine Injectionen der feinsten Blutgefässe, als kostbare Objecte in den anatomischen Sammlungen aufbewahrt. Hyrtl wird stets zu den geschicktesten Anatomen gezählt werden.

Hermann von Helmholtz.

Mit Hermann Helmholtz ist der berühmteste und bedeutendste Naturforscher unserer Zeit, welcher auf vielen Gebieten, in der Mathematik, Physik, Physiologie, Philosophie und der Aesthetik, ganz neue Bahnen geebnet hat, geschieden. Uebersehen wir jetzt das vor uns abgeschlossen liegende Leben und Wirken dieses mächtigen Geistes, so gewahren wir, wie von frühester Jugend an in ihm das erkennbar, was sich später so glänzend entfaltete, wie er mit einer wunderbaren Klarheit die schwierigsten Probleme erfasste und durchdachte und mit unerreichtem Geschick dem Experiment zugänglich machte, bis er die Lösung gefunden hatte, so weit als es überhaupt möglich war. Mit Ehrfurcht und Dankbarkeit gedenken wir seiner, der trotz aller äusserlichen Anerkennung und Bewunderung stets ein schlichter bescheidener Gelehrter und edelgesinnter Mensch blieb, und nur nach der Erkenntniss der Ursachen der Dinge und nach der Wahrheit strebte.

Der Lebensgang von Helmholtz ist in der letzten Zeit so oft und in so vorzüglicher Weise geschildert worden, dass ich hier nur einen Ueberblick über seine hauptsächlichsten Leistungen auf dem Gebiete der Physiologie geben will, um

uns die Bedeutung des Forschers und Denkers nochmals zu vergegenwärtigen und ihm auch von Seite unserer Akademie den schuldigen Tribut der Verehrung darzubringen.

Für Alles, was sich begreifen und logisch entwickeln lässt, zeigte er schon als Knabe eine Vorliebe und ein ausgeprägtes Talent, für die Sätze der Geometrie und dann für die Lehren der Physik. Es ist für die Wissenschaft ein Glück zu nennen, dass ihm seine Mittel nicht erlaubten sich alsbald der Physik zuzuwenden, sondern dass er vorerst Mediciner werden musste; viele und zum Theil die wichtigsten seiner Arbeiten wären sonst kaum entstanden. So wurde er zunächst zu derjenigen medicinischen Wissenschaft geführt, welche vor Allem sich mit der Erklärung der Erscheinungen befasst, zu der Physiologie, und von da erst später zu den rein physikalischen Vorgängen. Den weiten Ueberblick über andere Wissensgebiete, sowie die Neigung zu philosophischer Betrachtung verdankt er der Physiologie mit ihren engen Beziehungen zu der Philologie, Aesthetik, Philosophie und Psychologie. Aber auch für die Physiologie war es ein Glück, dass ein so grosses Talent für Mathematik und Physik sich ihr widmete und zwar zu einer Zeit, wo eine Menge der wichtigsten physikalischen Probleme der Lösung harrten.

Es war auf seine Entwicklung sicherlich von bestimmendem Einfluss, dass er als Lehrer in der Anatomie und Physiologie Johannes Müller fand, welcher, obwohl er noch längere Zeit in der Lehre von der Lebenskraft befangen war, doch die Lebensvorgänge durch Beobachtung und durch den Versuch zu erforschen trachtete und dadurch die neuere Physiologie anbahnte; er stellte z. B. den künstlichen Kehlkopf zur Erläuterung des Zustandekommens der Stimme her und wagte es zuerst von einer Physik der Nerven zu sprechen. Es ist gewiss kein Zufall, dass sich um diesen äusserst anregend wirkenden Mann so viele talentvolle und strebsame Jünger sammelten, wie Henle, Schwann, du Bois-Reymond,

Brücke, Virchow, Helmholtz, lauter spätere Koryphäen der Wissenschaft, welchen man vorzugsweise den Ausbau der Physiologie in physikalischer Richtung verdankt. Die Mehrzahl der Freunde fand sich auch im Laboratorium des Physikers Gustav Magnus, des Meisters im Experiment, sowie in der physikalischen Gesellschaft zusammen.

Nach kaum vollendeter Lernzeit an der Universität begann Helmholtz in bemerkenswerther Weise wissenschaftlich sich zu beschäftigen; stets waren es Fragen von principieller Bedeutung, denen er sich zuwandte.

Er arbeitete mit einem aus seinen Ersparungen angeschafften Mikroskop seine Dissertation aus, in welcher er den für die damaligen Hilfsmittel nicht leicht zu beobachtenden Zusammenhang der vorher von Ehrenberg entdeckten Ganglienzellen mit den Nervenfasern bei wirbellosen Thieren sicher nachwies; es hatte zwar schon vorher Remak diesen Zusammenhang beschrieben, aber keinen Glauben gefunden. Mit dieser Erkenntniss war zuerst ein Aufschluss über die Bedeutung dieser Zellen als nervöse Centralorgane gegeben. Später hat sich Helmholtz nochmals mit anatomischen Aufgaben befasst: mit der Beschreibung der Rippenmuskeln für die Athembewegungen und der äusserst sorgfältigen Beobachtung der Form der Gehörknöchelchen und ihrer Gelenke.

Es folgte die Abhandlung über das Wesen der Fäulniss und Gährung. Schwann hatte durch ingenieuse Versuche gezeigt, dass keine Gährung eintritt, wenn man geglühte Luft zu den Gährkölbchen zutreten lässt, und dass die Hefezellen die Ursachen der Gährung sind; Helmholtz that Liebig gegenüber dar, dass der Sauerstoff keinen Einfluss auf die Fäulniss hat; er drang aber nicht zu der Erkenntniss vor, dass auch hier niedere Organismen die alleinige Ursache sind.

In dem Artikel „Wärme“ im encyklopädischen Wörterbuch der medicinischen Wissenschaften versuchte er aus den damals vorliegenden wenig genauen Daten über die Kohlen-

säureausscheidung und die Sauerstoffaufnahme des Menschen, den in ihm im Tag verbrannten Kohlenstoff und Wasserstoff zu berechnen und daraus die im Körper erzeugte Wärmemenge zu entnehmen; er kam dabei aber doch zu einem Werth (2,7 Mill. W. E.), der sehr wohl mit den jetzt bekannten genauen Zahlen übereinstimmt.

Zu der Studienzeit von Helmholtz waren bekanntlich die meisten Physiologen Deutschlands, in Folge der unseligen naturphilosophischen Richtung, Anhänger der Lehre einer besonderen unerforschbaren Lebenskraft, welche die Lebensvorgänge bedingen und die physikalischen und chemischen Kräfte der anorganischen Natur beherrschen sollte. E. H. Weber war einer der Wenigen, der besonders darauf drang, die Erklärung der Lebenserscheinungen auf Grund der Beobachtung und des Versuchs wie die der physikalischen Processe zu finden und die unfruchtbaren naturphilosophischen Speculationen zu verlassen. Ein Geist wie Helmholtz, der in Allem nach den Ursachen suchte, konnte sich mit solchen Anschauungen auch nicht zufrieden geben. Er erkannte bald, dass die Lebenskraft in Widerspruch stehe mit dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft. Die Erkenntniss dieses Gesetzes ist nicht, wie man so häufig meint, eine Errungenschaft unseres Jahrhunderts, sie ist vielmehr sehr alt, man möchte fast sagen, so alt als eine erklärende Naturwissenschaft existirt; Leibnitz hat das Gesetz gekannt und es ist namentlich durch Daniel Bernouilli für die damals bekannten Kräfte mit aller Sicherheit bewiesen worden. Was in unserer Zeit hinzugekommen ist, das ist nicht die Erkenntniss des Princips selbst, sondern die Ausdehnung desselben auf diejenigen Vorgänge, welche man durch die Fortschritte der Wissenschaft neu hat kennen lernen; dadurch erfuhr das schon bekannte Gesetz eine Verallgemeinerung, namentlich auch auf die Lebensvorgänge. Es ist gewiss von Bedeutung, dass es vorzüglich zwei Mediciner, Julius Robert Mayer und Hermann

Helmholtz, waren, welche zu gleicher Zeit, im Gefühle der Absurdität der Annahme einer wie ein perpetuum mobile wirkenden Lebenskraft und in dem Bestreben auch die Lebenserscheinungen auf die bekannten Kräfte der leblosen Natur zurückzuführen, zur bestimmten Formulirung des alle Vorgänge umfassenden Naturgesetzes gelangten. Ersterer hat besonders die Beziehungen der mechanischen und auch der chemischen Energie zur Wärmebewegung erörtert und das mechanische Aequivalent der Wärme gemessen, letzterer hat auch die statische Elektrizität, die magnetischen, galvanischen und thermoelektrischen Bewegungen in das Gesetz aufgenommen. Helmholtz hat in der denkwürdigen Tischrede bei der Feier seines Jubiläums, die man immer wieder mit gleichem Genusse liest, in einzig dastehender Bescheidenheit geschildert, wie er die von ihm aufgestellten Sätze eigentlich für schon bekannt gehalten habe. Unzweifelhaft ist es aber, dass bald die Wirkung derselben eine mächtige war und von da an die Aufmerksamkeit Aller auf jenen Zusammenhang der Kräfte gerichtet war; auf die Physiologie hat die Anwendung des Gesetzes umgestaltend gewirkt, denn von da an beginnen mit voller Zuversicht die Anstrengungen die Lebensvorgänge durch das Experiment zu erforschen.

Helmholtz suchte in seinen nächsten Arbeiten Beweise für die Giltigkeit des Gesetzes von der Erhaltung der Energie für die Lebenserscheinungen zu bringen.

Wenn die Muskelkraft wirklich von dem Stoffwechsel oder von der Zersetzung complicirter chemischer Verbindungen in einfachere herrührt, und nicht von einer sich stets aus sich selbst erzeugenden Lebenskraft, dann musste man im arbeitenden Muskel einen Verbrauch gewisser Stoffe und die Entstehung von Zersetzungsprodukten finden. Lavoisier hatte wohl schon erwiesen, dass der arbeitende Mensch mehr Sauerstoff verbraucht wie der ruhende, aber für den isolirten Muskel war dies nicht dargethan; Helmholtz erhielt

aus dem tetanisirten Muskel eine Vermehrung des in Alkohol löslichen Theils der Fleischbrühe und eine Verminderung des in Wasser löslichen Theils. Welche Stoffe dabei in Betracht kommen, vermochte er nicht zu entscheiden; erst lange Zeit darnach erkannte man, dass bei der Muskelthätigkeit der Zerfall des stickstoffhaltigen Eiweisses gewöhnlich nur in geringem Grade erhöht ist, dass dagegen von den stickstofffreien Stoffen, Fett und Kohlehydrat, sehr beträchtlich mehr zersetzt wird.

Der grösseren Stoffzersetzung im thätigen Muskel musste eine grössere Entwicklung kinetischer Energie entsprechen und dies bewies nun auch Helmholtz durch den thermoelektrischen Nachweis einer höheren Temperatur des ausgeschnittenen tetanisirten, nach aussen hin keine Arbeit leistenden Muskels; im thätigen Nerven dagegen war nichts der Art zu bemerken. Er wandte hier zum ersten Male für die Untersuchung physiologischer Vorgänge feine physikalische Apparate an, in deren Erfindung er, wie sein Freund du Bois-Reymond, eine so grosse Meisterschaft zeigte.

Es folgte die Untersuchung des Verlaufes der mechanischen Veränderungen des Muskels während einer Zuckung mittelst des Myographions. Nachdem Carl Ludwig durch die Aufzeichnung der Schwankungen des Blutdruckes durch das Kymographion die graphische Methode in die Physiologie eingeführt hatte, liess Helmholtz den zuckenden Muskel die Contraction aufschreiben. Die Zuckung des Muskels geht so schnell vorüber, dass man nicht im Stande ist ihre Einzelheiten mit dem Auge zu verfolgen; indem er nun den Muskel mit einem Hebel in Verbindung setzte, der die Bewegung auf einem rasch rotirenden berussten Glascylinder aufzeichnete, gelang es die Muskelcurve mit allen ihren Details zu erhalten. Das Myographion ist einer der sinnreichsten und auch einer der wichtigsten Apparate der messenden Physiologie. Später kam Helmholtz nochmals auf die Vorgänge

im Muskel zurück bei der Untersuchung des Tons, welchen man im contrahirten Muskel wahrgenommen hatte; er that dar, dass die diesem Ton zukommende Anzahl von Schwingungen der Reizzahl entspricht, d. h. dass das Gehirn, wenn es durch den Willen einen Muskel zur Zusammenziehung bringt, dem letzteren 19 ½ Reize in der Secunde durch den Nerven zusendet.

Daran schloss sich eine der denkwürdigsten und geistreichsten Arbeiten an, die Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erregung im Nerven. Man dachte sich, dass diese Geschwindigkeit eine ungemein grosse sei, so gross wie etwa die des Lichtes oder des elektrischen Stromes, da man glaubte im Momente der Berührung der Haut auch die Empfindung zu haben oder im Momente der Willensaction auch schon die Muskelcontraction wahrzunehmen. Selbst Johannes Müller, der doch den Ausdruck „Nervenphysik" zuerst gebraucht hatte, hielt eine solche Messung wegen der Kürze des Nerven für unmöglich, und 15 Jahre darauf war dieselbe auf zwei ganz verschiedene Weisen durch Helmholtz mit aller Sicherheit durchgeführt. Zu der ersten benützte er die galvanometrische Methode der Messung kleinster Zeittheilchen von Pouillet; zu der zweiten die Verschiedenheit des Beginnes der Muskelcurven am Myographion bei Reiz des Nerven möglichst weit weg und nahe am Muskel; beide Methoden gehören zu den feinst ausgedachten und genauesten der Physiologie. Da sich dabei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Nerven nur zu etwa 30 Meter in der Secunde ergab, wesentlich geringer wie die vieler anderer Bewegungen, so kam man zu der Vorstellung, dass im Nerven verhältnissmässig grosse Widerstände entgegenstehen. In gleicher Weise wurde von Helmholtz die Geschwindigkeit bei einer Reflexbewegung gemessen d. i. die Zeit bei der Leitung der Erregung von einem sensibeln Nerven durch ein nervöses Centralorgan auf einen motorischen Nerven und den Muskel,

welche noch wesentlich länger ist, als die der Leitung im Nerven; die Vorgänge in den Centralorganen nehmen also noch mehr Zeit in Anspruch.

Die Erfindung, welche Helmholtz mit einem Schlage in der ganzen Welt berühmt gemacht hat, ist die des Augenspiegels. Wir sehen für gewöhnlich nichts von den Gebilden im Innern des Auges, wesshalb die Pupille schwarz erscheint, obwohl Lichtstrahlen von dem Augenhintergrunde reflectirt werden. Cumming und Brücke hatten aber das menschliche Auge unter gewissen Umständen leuchten sehen; Helmholtz wollte dies seinen Zuhörern mit Hilfe einer einfachen Vorrichtung erläutern und machte sich dabei alsbald durch den Gang der Lichtstrahlen klar, warum man für gewöhnlich vom Augenhintergrunde nichts wahrnimmt, und damit war die Möglichkeit gegeben, durch den Augenspiegel die Netzhaut eines Auges nicht nur leuchten zu sehen, sondern auch alle Einzelheiten auf ihr zu erkennen. Es war dadurch ein Instrument geschaffen, welches die Augenheilkunde mächtig gefördert und der leidenden Menschheit die grössten Dienste geleistet hat. Gerade der Umstand, dass mehrere ausgezeichnete Forscher der Lösung der Frage schon ganz nahe standen, Helmholtz aber sie in wenigen Tagen gefunden hatte, zeigt seine Geisteseigenschaften im hellsten Lichte.

Diese Entdeckung gab offenbar für ihn den Anstoss, sich mit der Physiologie des Auges näher zu beschäftigen. Er prüfte zuerst genau die beim Mischen von Farben entstehenden Empfindungen, indem er nicht, wie es bisher geschehen war, Pigmente mischte, sondern die reinen Spectralfarben, welche er durch eine besondere Einrichtung des Spectralapparates erhielt. Er legte so eine neue feste Grundlage für die Lehre von den Farbenmischungen und erklärte dann die erhaltenen Thatsachen durch die schon von Thomas Young ausgesprochene Theorie, wornach drei Grundfarben existiren, aus deren Mischung sämmtliche Farben-

empfindungen hervorgehen, und wornach ferner jedes Netzhautelement aus drei Fasern besteht, von denen jede nur durch eine bestimmte Grundfarbe erregt wird. Auf Grund dieser Theorie war es ihm möglich viele andere Erscheinungen am Auge, z. B. die farbigen Nachbilder, die Contrastfarben und die Farbenblindheit zu erklären.

Er wandte sich dann der Untersuchung nach den Vorgängen im Innern des Auges beim Sehen in die Ferne und in die Nähe, der sogenannten Accommodation, zu. Max Langenbeck und der Holländer Cramer hatten schon die drei Purkinje-Sanson'schen Reflexbildchen am Auge hiezu benützt und daraus geschlossen, dass die vordere Linsenfläche beim Sehen in die Nähe gewölbter wird. Helmholtz erfand zu diesem Zwecke das Ophthalmometer, ein Instrument, um trotz der Bewegungen des Auges die Durchmesser jener Reflexbildchen und die Radien der gekrümmten Flächen der durchsichtigen Medien des Auges genau zu bestimmen, womit die Veränderungen im Auge bei der Accommodation sicher gestellt wurden. Ferner muss in dieser Richtung noch erwähnt werden die Bestimmung der Lage der Gesichtslinie, die Ermittlung der Verzerrung der Bilder in Folge der Abweichung der brechenden Flächen, die Darstellung des Sehens mit zwei Augen, die Zurückführung der Augenbewegungen auf das Princip der leichtesten Orientirung im Raum, die Sichtbarmachung der übervioletten Lichtstrahlen ohne fluorescirende Mittel durch Verstärkung derselben mittelst Prismen und Linsen von Quarz.

Alle seine eigenen reichen Erfahrungen auf diesem Gebiete, sowie die früherer Zeiten sammelte Helmholtz in seinem grossen Werke der physiologischen Optik. Es ist ein Musterwerk. Alles hat er nochmals nachgeprüft und mit äusserster Gewissenhaftigkeit und Gerechtigkeit verzeichnet. Es wäre nur zu wünschen, dass wir in allen Theilen der Physiologie gleichwerthige Darstellungen besässen.

Von der Physiologie des Auges ging er zu der des Gehörorganes über und schuf durch eine Reihe meisterhafter Untersuchungen seine Lehre von den Tonempfindungen. Er legte sich zunächst die Frage vor, woher der verschiedene Klang der musikalischen Instrumente bei gleicher Tonhöhe kommt. Georg Simon Ohm hatte den Gedanken ausgesprochen, dass das Ohr die musikalischen Klänge in ihre harmonischen Partialtöne zerlege; dies bewies Helmholtz, indem er mit Zuhilfenahme der die zusammengesetzten Töne zerlegenden Resonatoren zeigte, dass die Töne der musikalischen Instrumente und der menschlichen Stimme nicht rein sind, sondern dass dem Grundton verschiedene höhere Obertöne beigemischt sind, welche die Klangfarbe bedingen. Indem er im Corti'schen Organ der Schnecke eine Claviatur erblickte, von welcher jede Saite nur durch einen bestimmten Ton in Schwingung versetzt wird, erklärt er die Fähigkeit des Ohrs aus einer Summe von Tönen die Componenten herauszuhören und die Resultirende zu empfinden. Und indem er Stimmgabeln von verschiedener Tonhöhe, den Grundton und verschiedene höhere Obertöne, gleichzeitig ertönen liess, erhielt er die Vocale der menschlichen Stimme, deren Nachahmung bis dahin nur ganz unvollständig geglückt war. Die Anschaffung dieses grossen elektrisch betriebenen Stimmgabelapparates ist ihm durch die Munificenz des für die Wissenschaft begeisterten Königs Maximilian II. von Bayern ermöglicht worden.

Er studirte sodann die Ursache der Consonanz und der Dissonanz der Töne. Man war bis dahin der Meinung, der Eindruck der Consonanz entstehe, wenn die Schwingungszahlen der gleichzeitigen Töne in einem einfachen Verhältniss zu einander stehen; aber damit war nur eine Thatsache und nicht die Erklärung gefunden. Helmholtz erkannte als Ursache der Dissonanz intermittirende Tonempfindungen, welche durch Schwebungen zweier gleichzeitiger Töne entstehen.

Diese Studien lenkten seine Aufmerksamkeit auf die Geschichte und die Theorie der Musik; indem er die innere Gesetzmässigkeit der Tonleitern und die Regeln der Musik aus seinen Erfahrungen ableitete, hat er einen bestimmenden Einfluss auf die Musikwissenschaft ausgeübt. Mit seinem unvergänglichen Werke der Lehre von den Tonempfindungen hatte er den Höhepunkt seiner physiologischen Leistungen erreicht; wenigstens zeigte er darin, dass er auf den verschiedensten Gebieten, der Physik, der Physiologie, der Musik und der Philosophie ein Meister war.

Später hat er sich in seiner letzten physiologischen Arbeit noch einmal mit dem Gehörorgan: den Gehörknöchelchen und dem Trommelfell befasst, worin er die Bedeutung dieser Gebilde für die Schallbildung aufs Genaueste auseinandersetzte.

Bei der intensiven Beschäftigung mit der Bedeutung der Sinnesorgane und der nervösen Centralorgane für das Zustandekommen der Sinnesempfindungen und Vorstellungen wurde er auch auf das Grenzgebiet der physischen und psychischen Vorgänge geführt, zu der Erkenntnisstheorie. Es bietet sich hier eine der Eingangspforten für den Experimentator, durch welche er zu dem Psychischen zu dringen vermag; es war Anderen schon gelungen, das Verhältniss der Erregungen des Nerven zu den nachfolgenden Empfindungen festzustellen. Ohne die Kenntniss der materiellen Vorgänge wird man auch auf diesem Gebiete niemals zur sicheren Erkenntniss der Wahrheit kommen, denn das blosse Nachdenken führt höchstens zu Möglichkeiten. Es wird allerdings vielleicht Jahrhunderte währen, bis man in diesen complicirtesten Processen der Erkenntnisstheorie nach und nach zu einigen der nächsten Ursachen gelangt. Helmholtz ist einer der Forscher, welcher in dieses dunkle Grenzgebiet mit leuchtender Fackel eintrat und aus den Ergebnissen der Beobachtung weitere Schlüsse zog und dadurch der Philosophie neue Vorstellungen brachte.

In dieser Weise wird wohl fast immer der Naturforscher, welcher neue Thatsachen erkannt hat, auch der beste Interpret derselben sein und am geeignetsten sein, philosophische Betrachtungen darüber anzustellen.

Ich suchte aus den physiologischen Arbeiten von Helmholtz darzuthun, dass er sich immer höhere Aufgaben stellte und sich allmählich zu einem der vielseitigsten Forscher und Gelehrten entwickelte: er war ein feiner Beobachter, ein findiger Experimentator, ein klarer tiefer Denker, der seine Gedanken auch in klassischer Form darzustellen wusste. Sein Ansehen wird in der Zukunft sich nicht mindern, sondern es wird noch wachsen. Es ist noch nicht die Zeit, zu entscheiden, ob er der hervorragendste Naturforscher unseres Jahrhunderts war; sicherlich aber ist er der umfassendste gewesen.

Sitzung vom 2. März 1895.

1. Herr C. v. KUPFFER macht eine Mittheilung: „Ueber die Entwicklung der Kiemenknorpel bei Petromyzon Planeri." Wird anderweit veröffentlicht.

2. Herr AD. v. BAEYER berichtet die Resultate seiner fortgesetzten Untersuchungen: „Ueber das Caron." Soll an einem anderen Orte publicirt werden.

Sitzung vom 4. Mai 1895.

1. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „Ueber den Drehwuchs der Kiefer.“

2. Herr F. Lindemann macht eine Mittheilung: „Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird.“

3. Herr H. Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Julius Bauschinger, Observator an der k. Sternwarte: „Ueber eine neue Bestimmung der Refractionsconstante auf astronomischem Wege“ vor.

4. Herr W. Dyck spricht: „Ueber die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristiken eines Functionensystems durch bestimmte Integrale.“

Ueber den Drehwuchs der Kiefer.

Von **Robert Hartig.**

(*Eingelaufen 4. Mai.*)

Bei keiner deutschen Holzart treten die Erscheinungen des „Drehwuchses" in so auffälliger und so verschiedenartiger Form auf, als bei der gemeinen Kiefer (Pinus silvestris). A. Braun[1]) erwähnt die ältere Literatur und weist darauf hin, dass schon Göthe in dem Aufsatze „über die Spiraltendenz der Vegetation" sich darüber folgendermassen ausspricht: „Herr Oberlandjägermeister von Fritsch äusserte Ende August in Ilmenau, dass unter den Kiefern Fälle vorkämen, wo der Stamm von unten bis oben eine gedrehte, gewundene Wirkung annähme; man habe geglaubt, da man dergleichen Bäume an der Brahne gefunden, eine äussere Wirkung durch heftige Stürme sei die Veranlassung; man finde aber dergleichen auch in den dichtesten Forsten und es wiederhole sich der Fall nach einer gewissen Proportion, so dass man 1 bis $1\frac{1}{2}$ Procent im Ganzen das Vorkommen rechnen könnte. Solche Stämme würden in mehr als einer Hinsicht beachtet, indem das Holz derselben nicht wohl zu Scheiten zerschnitten, in Klaftern gelegt werden könnte,

[1]) „Ueber den schiefen Verlauf der Holzfaser und die dadurch bedingte Drehung der Bäume" im Sitzungsberichte der Kgl. Pr. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1854. 7. August.

auch ein solcher Stamm zu Bauholz nicht brauchbar sei, weil seine Wirkung immer fortdauernd durch ein heimliches Drehen eine ganze Contignation aus ihren Fugen zu rücken die Gewalt habe.“ Seitdem sind Fälle von Drehwuchs bei der Kiefer wie bei anderen Holzarten oft beschrieben und A. Braun hat am angegebenen Orte den Nachweis geliefert, dass unter 167 Holzarten, über die sich seine Untersuchungen erstreckten, bei 111 Arten der schiefe Verlauf der Holzfaser regelmässig auftritt. Allerdings wird dadurch in den meisten Fällen nur eine schwache Drehung herbeigeführt, die einer technischen Verwendung des Holzes nicht hinderlich ist.

Die anatomische Erklärung, welche A. Braun für diese Erscheinungen gab, trifft das Wesen der Sache richtig, wie wir aus den nachfolgenden Darstellungen erkennen werden, wenn auch im Einzelnen die Dinge anders gelagert sind, als Braun sich dieselben dachte und nach dem damaligen Stande der anatomischen Kenntniss vorstellen konnte. Auf eine anatomische Untersuchung drehwüchsiger Bäume im Vergleich zu geradwüchsigen Individuen scheint sich Braun nicht eingelassen zu haben. Mir ist nicht bekannt, dass inzwischen von anderer Seite der Drehwuchs eine anatomische Bearbeitung gefunden hat, und da ich in den letzten Jahren in den Besitz einer Reihe von sehr interessanten drehwüchsigen Kiefern gelangte, so lag darin eine directe Aufforderung, dieselben eingehender zu untersuchen.

Den Ergebnissen schicke ich eine kurze Darstellung des Untersuchungsmaterials voran.

Stamm I.

Im Forstamt Freising bei München liess ich im Jahre 1889 eine 147jährige Kiefer von 31,4 m Höhe und 53 cm Brusthöhendurchmesser (ohne Rinde) fällen, welche bis zum 130sten Jahre im geschlossenen Bestande erwachsen und dann in Folge einer Niederlegung der meisten Bäume durch einen

Sturm völlig freigestellt war. Der Einfluss der Lichtstellung auf Zuwachsgrösse und Holzbeschaffenheit wurde von mir schon früher veröffentlicht.[1]) Dieser Stamm zeigte sich sehr geradspaltig und nur in der Jugend drehte derselbe, wie vielleicht jede Kiefer, etwas nach links.[2]) Die in 1,3 m Höhe entnommene Querscheibe zeigte noch 137 Jahresringe und von ihr stammen die Untersuchungsresultate Tab. I (S. 203).

Stamm II.

Etwa 20 Schritt von obigem Stamme entfernt stand eine 30,5 m hohe Kiefer von 66,0 cm Brusthöhendurchmesser. Dieser Baum, dessen Beschreibung ich in derselben Abhandlung[1]) gegeben habe, liess eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit im Verlaufe der Holzfasern erkennen. In den ersten Jahrzehnten drehte derselbe stark nach links bis zu 9° Abweichung von dem Loth. Im 40sten Ringe von innen waren die Fasern lothrecht; dann begann eine Abweichung nach rechts bis zu 5°. Im 70sten Ringe verliefen die Fasern wieder lothrecht. Dann trat starke Drehung nach rechts ein bis zu 19° Abweichung vom Loth. Vom 100sten Ringe an nimmt die Neigung wieder etwas ab und zeigt in den letzten Jahrzehnten nur 10°. Bemerkenswerth ist dabei, dass in derselben Wuchsperiode der Drehungswinkel keineswegs in allen Theilen des Umfanges derselbe, sondern an einem Punkte oft erheblich grösser ist, als an anderen Theilen. Wenn man aus einem Holzabschnitt einen Keil abspaltet, so zeigt die Spaltfläche einen unregelmässig welligen Verlauf. Das Holz derselben Wachsthumszone zeigt ferner in einem Baumtheile eine Richtung von 10°, in einem etwa 20 cm darüber gelegenen Theile von 15°.

---

[1]) Allg. Forst- u. Jagdzeitung 1889. „Ueber den Lichtstandszuwachs der Kiefer."

[2]) „Links" im subjectiven Sinne, d. h. für den Beschauer verlaufen die Fasern von rechts unten nach links aufwärts.



Stamm III.

Eine 223 Jahrringe zählende Kiefernscheibe aus der Pfalz, die ich der Sammlung des botanischen Instituts verdanke, zeigt in der Jugend Linksdrehung bis zum 100sten Jahr. Von da an tritt Rechtsdrehung ein, die im letzten Decennium 11° erreicht. Abnahme und Zunahme der Drehung erfolgen ziemlich regelmässig.

Stamm IV.

Im Jahre 1894 fand ich an einer Sägemühle bei Kirchseeon (Oberbayern) einen circa 5 m langen Kiefernbloch, welcher unten 76 cm, oben 54 cm Durchmesser besass und ausserordentlich stark links drehte.

Am unteren Ende (IV), welches 190 Ringe zählte, begann die Linksdrehung von Jugend auf schnell und fast völlig gleichmässig zunehmend bis zu 55° Abweichung von der lothrechten Richtung.

Stamm V.

Am oberen Ende desselben Bloches zeigte das Holz von Anfang an eine sehr starke Drehung (15°) nach links. Dieselbe stieg nur langsam und erreichte im letzten Jahrzehnt 43°.

Stamm VI.

Herr Professor Tursky aus Moskau sandte mir vor zwei Jahren ein Kiefernstammstück, von dem der innere Theil, der wahrscheinlich etwa 70 Ringe umfasst haben mochte, durch Polyporus vaporarius zerstört worden war. Der noch gesunde Theil, der 150 Ringe zählte, liess in den innersten 10 Ringen völlige Geradfaserigkeit erkennen. Von da an begann anfangs langsam, dann schnell zunehmende Rechtsdrehung, die im letzten Jahrzehnt einen Grad erreichte, dass die Fasern in welligem Verlaufe, also im Durchschnitt mit 90° rings um den Stamm herum liefen.

Stamm VII.

Ein 280 Jahresringe zeigendes, 8 cm starkes Lärchenstammstück, das, aus den österreichischen Alpen stammend, mir bei Gelegenheit einer Forstausstellung zur Verfügung gestellt wurde, war so interessant, dass ich dasselbe in die Untersuchung einbezog. Bis zum 60sten Ringe von innen war der Faserverlauf ein völlig gerader. Von da an begann Rechtsdrehung, die zuletzt 70° erreichte. Seit 200 Jahren ist der Zuwachs ein ausserordentlich geringer, so dass jeder Jahrring meist nur aus zwei Tracheiden besteht. Eine vorübergehende Zuwachssteigerung im 110—150. Lebensalter ist aber sehr interessant wegen der später zu erwähnenden Beeinflussung der Organlänge. Vom 150. Jahrringe an trennt sich der Holzkörper in ähnlicher Weise wie bei der Borkenbildung. Es entstehen Risse, und die neu sich bildenden Holzringe verlaufen nur noch wie ein Band spiralig um den Stamm herum.

Stamm I.

Alter	Länge der						Mittlere Länge aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel		Quertheilung der Tracheiden	
	Leitungstracheiden			Fasertracheiden								
	Minimum	Mittel	Maximum	Minimum	Mittel	Maximum			links	rechts	links	rechts
		mm			mm			qcm				
137	2,38	2,72	3,13	1,19	3,19	4,10	2,96	14,3	—	—	16	18
130	2,70	3,17	3,78	2,16	3,39	4,32	3,28	22,7	—	—	—	—
120	2,16	3,47	4,32	1,67	3,51	4,64	3,49	12,1	1	—	19	18
110	2,81	3,28	4,00	1,73	3,39	5,29	3,34	14,1	1	—	—	—
100	2,11	3,06	4,16	2,05	3,21	4,00	3,14	18,0	1	—	—	—
90	2,05	2,98	4,10	2,38	3,22	4,16	3,10	20,5	—	—	—	—
80	1,94	2,67	3,46	1,40	2,83	3,46	2,75	12,5	—	—	23	27
70	2,81	3,30	3,78	2,54	3,55	4,00	3,42	11,2	—	—	—	-
60	1,84	3,05	3,67	2,70	3,46	4,21	3,25	13,5	—	—	—	—
50	2,05	2,86	3,73	2,05	3,31	4,10	3,08	15,0	—	—	—	—
40	1,92	3,06	3,56	2,59	3,28	3,78	3,17	17,5	1	—	—	—
30	2,05	2,76	3,78	1,73	3,01	3,78	2,88	20,1	—	—	—	.
20	0,76	2,20	3,08	1,73	2,42	3,13	2,31	19,2	1	—	19	17
10	0,86	2,05	2,86	0,81	2,20	2,92	2,12	3,9	2	—	21	17
2	0,92	1,13	1,67	0,92	1,24	1,73	1,18	—	3	—	24	19

Stamm II.

Alter	Länge der Leitungstracheiden: Minimum	Mittel	Maximum	Länge der Fasertracheiden: Minimum	Mittel	Maximum	Mittlere Länge aller Tracheiden	Drehungswinkel: links	rechts	Quertheilung der Tracheiden: links	rechts
		mm			mm						
137	1,62	2,80	3,89	2,59	3,39	4,21	3,09	—	10	23	13
130	1,13	3,03	4,05	2,54	3,57	4,97	3,30	—	10	—	—
120	1,93	2,94	4,32	1,57	3,64	4,32	3,29	—	15	13	26
110	2,38	3,53	4,32	2,38	3,52	4,64	3,52	—	17	—	—
100	2,27	3,07	4,43	2.16	3,30	3,78	3,19	—	17	11	30
90	2,16	2,99	3,67	1,40	3,25	4,10	3,12	—	19	14	23
80	2,05	2,84	3,51	1,46	2,58	3.35	2,71	—	6	—	—
70	2,05	2,87	4,05	2,27	3,14	4,00	3,00	—	0	20	16
60	1,51	2,64	3,83	1,08	2,89	3,83	2,77	—	5	13	21
50	1,62	2,96	3,89	1,02	2,75	4,32	2,85	—	5	—	—
40	1,30	2,29	3,78	1.77	2,80	4,10	2,55	—	0	15	17
30	1,30	2,42	3,46	1,62	2,38	3,13	2,40	7	—	—	—
20	1,51	2,47	3,08	1.40	2,56	3,24	2,52	9	—	29	15
10	1,29	1,59	1,89	1,13	1,69	2,00	1,64	4	—	7	5

Stamm III.

Alter	Länge der Leitungstracheiden: Minimum	Mittel	Maximum	Länge der Fasertracheiden: Minimum	Mittel	Maximum	Mittlere Länge der Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel: links	rechts	Quertheilung der Tracheiden: links	rechts
		mm			mm			qcm				
223	2,05	2,87	4,05	2,37	3,37	4,21	3,12	26,2	—	11	9	13
203	1,94	2,67	3,67	2,70	3,30	3,78	2,98	21,4	—	8	—	—
183	2,32	2,91	3,67	2,70	3,28	3,89	3,10	36,7	—	9	—	—
163	2,27	3,19	4,00	2,27	3,21	4,05	3,20	40,6	—	7	10	22
143	1,94	3,12	4,21	2,16	3,37	4,10	3,25	47,2	—	3	—	—
123	2,02	3,28	4,26	2,81	3,47	4,32	3,37	48,7	—	1	10	19
103	1,35	2,96	3,94	2,38	3,20	3,78	3,08	53,6	0	0	—	—
83	2,00	2,68	3,35	2,48	3,26	4,00	2,97	60,2	3	—	11	17
63	1,46	2,68	3,29	1,94	2,85	3,89	2,76	51,8	3	—	—	—
43	1,84	2,39	2,92	2,00	2,88	3,62	2,64	39,2	4	—	15	16
23	2,16	2,56	3,13	1,57	2,59	3,29	2,57	19,0	5	—	—	—
13	0,92	1,99	3,02	1,62	2,27	2,92	2,13	7,9	5	—	22	8
3	0,49	0,77	1,08	0,97	1,15	1,40	0,95	—	2	—	20	11

Stamm IV.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Leitungstracheiden Mittel	Leitungstracheiden Maximum	Länge der Fasertracheiden Minimum	Fasertracheiden Mittel	Fasertracheiden Maximum	Durchschnitts-Länge aller Tracheiden	Durchschnitts-Breite aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm			mm/100	qcm				
190	1,84	2,52	3,35	1,51	2,53	3,24	2,53	3,6	4,7	55	—	25	1
180	1,51	2,55	3,56	1,57	2,66	3,24	2,60	3,6	5,9	55	—	—	—
170	2,11	2,56	3,46	2,48	3,27	3,89	2,92	3,4	11,7	52	—	—	—
160	1,73	2,87	3,89	2,16	3,19	3,73	3,03	3,2	14,9	49	—	—	—
150	1,13	2,89	3,46	1,13	2,82	3,56	2,86	3,2	23,6	47	—	—	—
140	1,89	2,78	3,46	2,48	2,88	3,35	2,83	3,4	34,6	45	—	46	16
130	2,16	2,95	3,56	1,94	3,28	4,43	3,11	3,1	34,1	45	—	—	—
120	1,84	2,59	3,56	2,32	2,81	3,35	2,70	3,3	53,8	43	—	—	—
110	1,46	2,76	3,89	1,51	3,07	3,78	2,91	3,3	77,7	38	—	26	12
100	2,16	2,72	3,35	1,84	2,89	3,67	2,80	3,1	22,1	33	—	—	—
90	0,97	2,23	3,29	1,62	2,58	3,56	2,41	3,4	22,8	30	—	—	—
80	1,84	2,50	3,40	1,51	2,58	3,35	2,54	3,0	33,0	25	—	—	—
70	1,51	2,28	2,92	1,73	2,59	3,67	2,44	2,8	33,8	20	—	—	—
60	1,84	2,42	3,02	1,62	2,49	3,56	2,45	2,8	34,3	15	—	13	15
50	1,51	2,51	3,08	1,62	2,81	3,56	2,66	2,8	25,2	18	—	—	—
40	1,51	2,14	2,70	1,57	2,32	2,75	2,23	2,8	16,0	13	—	30	19
30	1,73	2,08	2,43	1,73	2,23	3,19	2,15	2,6	2,5	9	—	29	9
20	1,51	1,74	2,21	1,62	2,10	2,43	1,92	2,3	0,3	7	—	—	—
10	1,08	1,36	1,78	1,29	1,73	2,27	1,54	1,9	0,1	3	—	16	7
2	0,78	0,92	1,29	0,54	0,99	1,19	0,95	—	—	—	—	—	—

Stamm VII.

Alter	Länge der Tracheiden Minimum	Länge der Tracheiden Mittel	Länge der Tracheiden Maximum	Jahres-Zuwachs an Querfläche	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm		qcm				
280	1,03	1,70	2,65	0,09	—	70	4	18
220	0,86	1,65	2,32	0,11	—	50	—	—
170	1,10	2,30	3,34	0,18	—	30	16	27
140	0,92	2,08	2,81	0,17	—	20	—	—
120	0,86	1,90	2,48	0,13	—	10	11	25
80	1,19	2,84	3,62	0,30	—	3	9	17
60	1,84	3,20	3,89	0,42	0	0	—	—
40	2,05	3,11	4,27	0,46	0	0	—	—
20	1,89	2,62	3,24	0,43	0	0	—	—
10	1,19	1,86	2,81	0,53	0	0	15	16
2	0,65	0,84	1,08		0	0	—	—

Stamm V.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Länge der Leitungstracheiden Mittel	Länge der Leitungstracheiden Maximum	Länge der Fasertracheiden Minimum	Länge der Fasertracheiden Mittel	Länge der Fasertracheiden Maximum	Mittlere Länge aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm			qcm				
155	0,97	2,75	4,10	0,76	2,68	4,10	2,71	2,1	43	—	16	12
145	1,24	2,85	4,16	1,08	2,63	4,10	2,74	2,8	40	—	—	—
135	2,27	3,01	3,89	2,70	3,26	3,89	3,13	4,8	35	—	—	—
125	1,84	2,66	3,56	1,08	2,47	3,89	2,57	6,7	35	—	25	15
115	1,73	3,40	4,32	1,73	2,64	3,89	3,02	7,9	25	—	—	—
105	1,73	3,13	4,32	1,73	3,25	4,97	3,19	13,2	20	—	—	—
95	1,94	3,31	4,43	2,38	3,30	4,64	3,30	14,8	20	—	21	17
85	3,02	3,62	4,37	1,94	3,65	4,37	3,63	16,5	20	—	—	—
75	0,86	3,23	4,10	2,05	3,35	3,89	3,29	17,9	20	—	—	—
65	2,16	3,77	4,54	1,62	3,73	4,37	3,75	8,2	15	—	—	—
55	3,02	3,48	4,86	2,81	3,49	4,86	3,49	10,1	15	—	12	11
45	2,05	3,26	4,43	1,46	3,34	4,75	3,30	9,6	15	—	—	—
35	2,49	3,30	4,10	1,73	3,35	4,10	3,38	15,4	15	—	—	—
25	2,16	3,26	3,89	1,62	3,51	4,37	3,38	16,5	15	—	—	—
15	1,73	2,85	3,67	1,94	3,07	3,89	2,96	9,9	15	—	21	19
2	0,75	1,34	1,94	0,75	1,41	2,48	1,37	—	—	—	26	13

Stamm VI.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Länge der Leitungstracheiden Mittel	Länge der Leitungstracheiden Maximum	Länge der Fasertracheiden Minimum	Länge der Fasertracheiden Mittel	Länge der Fasertracheiden Maximum	Durchschnitts-Länge aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel der Tracheiden links	Drehungswinkel der Tracheiden rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm			qcm				
220	1,51	2,66	3,67	1,73	2,90	4,10	2,78	17,8	-	90	12	21
210	1,26	2,39	3,35	1,40	2,65	4,00	2,52	21,7	—	85	-	—
200	0,54	2,12	2,86	1,19	2,37	3,29	2,25	16,9	—	80	10	19
190	1,84	2,61	3,12	2,48	3,06	3,67	2,83	20,6	—	65	—	—
180	1,73	2,54	4,32	1,73	2,85	3,67	2,70	21,9	—	60	7	27
170	2,48	3,68	4,64	2,38	3,62	5,51	3,65	22,1	—	40	—	—
160	2,70	3,26	4,43	2,70	3,80	4,86	3,53	21,1	—	30	11	24
150	2,92	3,42	4,21	3,24	4,15	4,54	3,78	26,4	—	20	—	—
140	2,81	3,36	3,67	3,45	4,39	6,53	3,88	29,8	—	20	—	—
130	2,48	3,44	4,32	2,05	4,07	4,86	3,76	18,8	—	20	11	15
120	2,48	3,66	4,54	3,02	4,02	4,86	3,84	20,7	—	10	—	—
110	2,38	3,41	4,75	2,16	3,74	4,54	3,58	20,8	—	10	—	—
100	2,48	3,89	4,75	2,97	3,92	4,75	3,91	25,6	—	5	18	23
90	2,81	3,96	4,97	2,05	3,94	4,97	3,95	17,5	—	3	—	—
80	2,59	3,76	4,32	2,92	3,75	4,97	3,76	15,1	0	0	31	38
70	3,29	3,70	4,21	2,70	3,70	4,43	3,70	—	0	0	7	12

Ueberblicken wir die an den Stämmen I—VI auftretenden Drehungsrichtungen, so erkennen wir zunächst, dass alle Kiefern in der ersten Jugend links drehen. Wahrscheinlich gilt das auch für Stamm VI, dessen innerer Holztheil verfault war. Vom 20. bis 30. Ringe an tritt entweder Geradfaserigkeit ein (I), oder die Linksdrehung setzt sich in gesteigertem Grade in der Folge fort (IV und V), oder der Drehungswinkel nimmt ab und geht aus der Linksdrehung in die Rechtsdrehung über. Diese Aenderung kann schon frühzeitig (II) oder erst nach dem 100sten Jahrring (III) eintreten. Die Abnahme oder Zunahme der Schrägstellung erfolgt entweder gleichmässig oder periodisch sich ändernd, so dass auf starke Drehungen schwache und umgekehrt folgen (II). Der Drehungswinkel ist am ganzen Stamme zu derselben Zeit nicht derselbe, kann vielmehr nach oben abnehmen (IV, V). Auf den verschiedenen Seiten des Baumes ist der Winkel der Drehung ein verschiedener.

Da Braun den Drehwuchs in Beziehung zu dem Längenwachsthum der Cambialzellen gebracht hat, so schien es mir zunächst wünschenswerth zu sein, einen klaren Einblick in die Längenverhältnisse der Tracheiden bei geradfaserigen und drehwüchsigen Bäumen zu erhalten. Sanio[1]) kam durch seine Untersuchungen an einem 110jährigen Kiefernstamm zu dem Ergebnisse, dass die mittlere Länge der Tracheiden im ersten d. h. im innersten Ringe am kürzesten und zwar unter 1 mm lang sei, dass diese Länge in den nächsten Jahrringen schnell zunehme und im 30sten Jahre 2,60 mm erreicht. Nach dem 30sten Jahre blieb sich die Länge entweder gleich, oder zeigte nur eine sehr geringe Zunahme.

Ich habe schon für die Rothbuche[2]) und Fichte[3]) nach-

---

[1]) Pringsheim's Jahrb. VIII p. 401 ff.

[2]) Das Holz der Rothbuche. 1888 p. 25. Berlin.

[3]) Die Verschiedenheiten in der Qualität und im anatomischen Bau des Fichtenholzes. In Forstl. naturw. Zeitschr. 1892 p. 232.

gewiesen, dass die Organlänge von einem gewissen Alter an wieder abnimmt, und zwar bei Bäumen, welche im Bestande bedrängt sind, früher als bei den dominirenden Bäumen. Neuerdings hat Omeis[1]) gefunden, dass in einem geringwüchsigen 110jährigen Kiefernbestande bei Brusthöhe die Tracheidenlänge schon im 50sten Jahre ihr Maximum erreichte und darnach schnell abnahm. Auch Bertog[2]) bestätigt die Abnahme der Organlänge etwa vom 80sten Jahre an für Fichte und Tanne.

Das Ergebniss meiner Messungen an dem vorbezeichneten Untersuchungsmateriale ist ein in mehrfacher Beziehung interessantes.

In den beigefügten Tabellen I—VII habe ich nicht allein die Mittellänge aus etwa je 60 Einzelmessungen, sondern auch die grösste und geringste Länge beigefügt. In jedem Holztheile befinden sich Tracheiden der verschiedensten Länge, und es bedurfte einer grossen Zahl von Messungen, um eine brauchbare Mittelzahl zu erhalten.

Ehe wir die Verhältnisse besprechen können, welche auf die Länge der Organe einen Einfluss ausüben, erscheint es nothwendig, die Zelltheilungsvorgänge in der Initialschicht des Cambiummantels ins Auge zu fassen, durch welche die Initialzellen selbst sich vermehren. Da der tangentiale Durchmesser der Initialzellen eine beschränkte Grösse besitzt, so muss mit der Umfangszunahme des Axentheiles eine Vermehrung derselben eintreten. Diese Vermehrung beruht auf einer Quertheilung der Cambialzellen. Allerdings ist es ausserordentlich schwierig, diese Quertheilung in der Initialschicht selbst zu beobachten. Da aber die Streckung der aus der Initialzelle hervorgegangenen Gewebezellen bei der

---

[1]) Wachsthumsgang und Holzbeschaffenheit eines 110jährigen Kiefernbestandes. Das. 1895, April.

[2]) Wuchs und Holz der Weisstanne und Fichte. Ebend. 1895, Mai.

Kiefer nur eine geringe ist, so darf man aus dem Gestaltungsverhältnisse der Tracheiden selbst einen Schluss auf die Grössenverhältnisse der Initialzellen ziehen. Die Quertheilung erfolgt zwar in der Mehrzahl der Fälle annähernd in der Mitte der Organe, nicht selten wird aber von einer langen Initialzelle nur ein ganz kurzes Stück abgeschnitten. So kommen Fälle vor, in denen eine Zelle von 5,5 mm Länge in zwei Tochterzellen zerlegt wird, von denen die eine 4,8 mm, die andere 0,7 mm lang ist.

Wahrscheinlich erfolgt die Theilung an dem Punkte der Initialzelle, wo durch die peripherische Ausdehnung auf die Entstehung neuer Initialzellen der grösste Reiz ausgeübt wird. Die beiden Tochterzellen strecken sich nun in der durch die Stellung der Querwand vorgezeichneten Richtung an einander vorbeigleitend. (Fig. IIc.) Das obere Ende der unteren Zelle wächst nach oben. Das untere Ende der oberen Zelle streckt sich nach unten, und dieses Strecken veranlasst nicht allein eine von Jahr zu Jahr zunehmende Länge der Organe, sondern auch eine immer steilere Richtung der Querwände. In einer gegebenen Querfläche vermehrt sich also die Zahl der Initialzellen dadurch, dass die Enden der aus Quertheilung hervorgegangenen neuen Zellen von oben und von unten her zwischen die vorhandenen Initialzellen sich einschieben. Raatz,[1]) der diesen Theilungsprozess richtig erkannt und gedeutet hat, ist darüber in Zweifel, ob nicht von Anfang an die Querwände rechtwinklig zur Längsaxe der Cambialzellen stehen und erst nachträglich eine schräge Stellung in Folge des Längenwachsthums einnehmen.

Aus meinen Untersuchungen habe ich die Ansicht gewonnen, dass die Querwände von Anfang an entweder nach rechts oder nach links aufwärtssteigend sind. Es beruht

---

[1]) Die Stabbildungen im secundären Holzkörper der Bäume und die Initialtheorie. In Pringsheim's Jahrb. 1892 p. 631.



darauf, wie wir sehen werden, die Erscheinung des Drehwuchses der Bäume.

Der Umstand, dass wir jederzeit die verschiedensten Organlängen nebeneinander vorfinden, erklärt sich also daraus, dass dieselben aus jungen und alten Initialzellen entstanden sind, d. h. aus solchen, die eben erst eine Quertheilung erfahren haben, und solchen, die schon eine Reihe von Jahren sich zu strecken Zeit hatten.

Es ist nun leicht verständlich, wesshalb in den innersten Jahresringen die Organe noch klein sind. Sie sind aus jungen Initialzellen entstanden. In den beigegebenen Tabellen habe ich auch die Organlängen des zweiten oder dritten Ringes angegeben, und wird man daraus ersehen, dass die grössten Längen nur etwa den dritten Theil derjenigen Faserlänge erreichen, die in höherem Alter auftreten.

Im weiteren Entwicklungsgange des Baumes oder Baumtheiles wird nun die Organlänge bedingt durch die Ernährung des Baumes, insofern eine nachhaltige Steigerung in dem Wachsthumsgange des Baumes auch auf das Längenwachsthum der Initialzellen günstig, ein andauerndes Sinken des Baumzuwachses ungünstig einwirkt, während schnell vorübergehende Steigerungen oder Störungen des Zuwachses ohne Einfluss sind. Im entgegengesetzten Sinne wirkt natürlich die mit dem Zuwachse verbundene Umfangszunahme des Baumtheiles. Je schneller sich die Peripherie und der Cambiummantel vergrössert, um so lebhafter erfolgt die Zellvermehrung durch Quertheilung der Initialzellen. Das Durchschnittsalter und die mittlere Länge der Initialzellen wird damit herabgedrückt.

Berechnet man den Zuwachsgang an Querfläche (siehe in den Tabellen die Spalte über Jahreszuwachs) und vergleicht ihn mit der Länge der Tracheiden, so ist eine Beziehung zwischen beiden gar nicht zu verkennen. Ein völliger Parallelismus besteht freilich nicht, aber dem Steigen

und Sinken des Zuwachses folgt nach einiger Zeit ein Zunehmen oder Abnehmen der Organlänge in ersichtlichem Grade.

Es wird nunmehr auch verständlich, woher es kommt, dass im untern Theile eines Baumes die Organe immer erheblich kleiner sind, als höher im Stamme aufwärts bis zum Kronenansatz. Wir wissen, dass die Zuwachsgrösse im dominirenden, d. h. noch nicht unterdrückten Kiefernstamme von oben nach unten zunimmt und dass insbesondere der untere Stammtheil einen viel lebhafteren Querflächenzuwachs besitzt, wie die oberen Schafttheile. Schon ein Vergleich zwischen den Stammstücken IV und V, die 5 m von einander entfernt lagen, zeigt den grossen Unterschied im Zuwachse gleicher Wuchsperioden. Am unteren Ende des Stammes nimmt der Umfang jährlich mit einem höheren Procentsatze zu als in dem oberen Schafttheile, und die Zellvermehrung durch Quertheilung muss demgemäss schneller vor sich gehen, als oben. Die Initialfasern erreichen somit unten ein geringeres Alter, als im oberen Stammtheile, sind desshalb kürzer als dort.

Untersucht man die Organlänge an einem excentrisch gewachsenen Stammtheile auf der breitringigen und auf der engringigen Seite, so überrascht ferner die Thatsache, dass auf letzterer die Organe im Durchschnitt länger sind, als auf der ersteren. Am Stammstück V hatten die Tracheiden der schmalen Seite die auf Seite 212 zusammengestellten Längen, welche mit denen der breiten Seite (siehe auch Seite 206 Tab. V) zu vergleichen sind.

Es scheint mir zweifellos zu sein, dass die langsamere Ausdehnung des Cambiumringes und dem entsprechend die sich seltener wiederholende Quertheilung der Initialfasern die Ursache der grösseren Länge der Tracheiden auf der schmalen Seite des Baumes ist. Sie werden auf dieser Seite älter, als auf der breiten Seite.

Irgend welche Beziehungen zwischen der Organlänge und der Drehwüchsigkeit der Bäume lässt sich aber nicht erkennen.

Alter	Schmale Seite			Breite Seite
	Leitungs-tracheiden	Faser-tracheiden	Mittellänge aller Tracheiden	Mittellänge
155	3,81	3,68	3,72	2,71
145	—	—	—	2,74
135	3,67	3,59	3,63	3,18
125	3,26	2,83	3,05	2,57
115	3,60	3,83	3,71	3,02
105	3,64	3,87	3,75	3,19
95	3,79	3,83	3,81	3,30
85	3,50	3,73	3,62	3,68
75	4,11	3,69	3,90	3,29
65	4,00	3,95	3,97	3,75
55	3,84	4,01	3,93	3,49
45	3,14	3,48	3,31	3,30
35	3,41	3,70	3,56	3,33
25	3,18	3,64	3,41	3,38
15	2,87	3,35	3,11	2,96
2	1,34	1,41	1,37	1,37

Die Geradspaltigkeit und der schräge Verlauf der Holzfasern hängt vielmehr, wie die weiteren Untersuchungen ergeben haben, von dem Verhältnisse ab, in welchem die beiden Quertheilungen der Initialfasern zu einander stehen. Untersucht man auf Tangentialschnitten, wie viele der jüngeren, d. h. der noch nicht sehr steil aufsteigenden Querwände von rechts nach links, wie viele von links nach rechts aufsteigen, so ergibt sich zunächst, dass stets beide Arten von Quertheilungen vorkommen, dass aber das Verhältniss derselben keineswegs immer das annähernd gleiche ist. In den Tabellen I—VII habe ich in den letzten beiden Spalten angegeben, wie viele Rechts- und wie viele Linkstheilungen ich in dem betreffenden Alter vorfand.

Vergegenwärtigen wir uns die Wirkung, welche das Längenwachsthum der aus der Quertheilung einer Initialfaser hervorgegangenen beiden Tochterzellen auf die Richtung der Fasern ausüben muss, so ist ersichtlich, dass bei einer Quertheilung nach rechts das obere Ende der unteren Zelle, indem es, dem unteren Ende der Schwesterzelle ausweichend,

nach rechts vorbeiwächst, eine Ablenkung nach rechts erhält, wogegen das untere Ende der oberen Schwesterzelle bei seiner Verlängerung nach unten eine Ablenkung nach links erfährt. Ein Baum, dessen Initialzellen sich von Jugend auf immer nur in vorgedachter Weise theilen würden, müsste bald eine Schrägstellung aller Fasern von links nach rechts zeigen.

In den ersten Jahrzehnten drehen alle Kiefern mehr oder weniger links, und dies kommt daher, dass die Zahl der Quertheilungen nach links in den ersten Jahrzehnten immer überwiegt, so z. B. bei Stamm I mit 24 zu 19 im 2. Ringe, mit 21 zu 17 im 10. Ringe. Bei den im späteren Alter geradfaserig wachsenden Kiefern schwankt nun die Zahl der Rechts- und Linkstheilungen je nach dem Baumtheile und Jahrringe, ohne ein Vorherrschen der einen oder andern Theilungsrichtung erkennen zu lassen. (Siehe Figur II.) Dadurch gleicht sich aber die Wirkung beider Theilungsarten in Bezug auf den Faserverlauf im Ganzen aus. Sehr instructiv ist Stamm II. Bis zum 20. Ringe zeigt derselbe starke Linksdrehung (9°) und 29 Linkstheilungen gegenüber 15 Rechtstheilungen. Dann stellen sich die Fasern mit dem 40. Ringe senkrecht, und zwar in Folge davon, dass die Rechtstheilungen die Ueberhand gewinnen.

Im 60. Jahre ist die Schrägstellung nach rechts 5° und zwar in Folge der grossen Ueberzahl der Rechtstheilungen (21 r. zu 13 l.). In den nächsten 40 Jahren überwiegen wieder die Linkstheilungen mit 20 zu 16, in Folge dessen die Fasern die lothrechte Richtung einnehmen. Von da an überwiegen wieder die Rechtstheilungen, so dass die Rechtsdrehung sehr stark wird. In den letzten Jahrzehnten vermindert sich die Schrägstellung wieder, weil die Linkstheilungen wieder überwiegen (23 gegen 13).

Bei Stamm III erreicht die Linksdrehung der Jugend mit 5° ihr Maximum in Folge überwiegender Linkstheilungen.

Vom 43. Jahre an überwiegt für alle Folgezeit die Rechtstheilung. In Folge dessen geht schon von da an die Linksdrehung aus 5° in 4° über, mindert sich immer mehr, erreicht mit 103 Jahren die Senkrechte und geht nun in die Rechtsdrehung über.

Stamm IV zeigt von Jugend auf ein Ueberwiegen der Linkstheilungen und dem entsprechend eine immer stärker werdende Linksdrehung bis zu 55°. Nur im 60. Jahre findet einmal eine Abschwächung des Drehungswinkels von 18° auf 15° statt und der betreffende Holztheil liess in der That ein Ueberwiegen der Rechtstheilungen erkennen.

Für Stammstück V gilt dasselbe, nur mit dem Unterschiede, dass die Fasern gleich in den ersten Jahren sehr stark links (15°) drehen und dann in der Folge der Drehungswinkel nur langsam grösser wird.

Der Moskauer Stamm VI, dessen innerer Kern durch Holzparasiten zerstört wurde, zeigt im 70. Jahre schon ein Ueberwiegen der Rechtstheilungen, da offenbar in den vorhergehenden Jahrzehnten der Stamm nach links gedreht hatte, und erst durch länger anhaltendes Ueberwiegen der Rechtstheilungen in die senkrechte Faserstellung gelangen musste. In der Folge überwogen die Rechtstheilungen so sehr, dass nach dem 200. Jahre der Faserverlauf nahezu ein horizontaler wurde.

Der Lärchenstamm VII zeigt bis zum 60. Jahre Geradfaserigkeit und Gleichheit in den Rechts- und Linkstheilungen. Von da an überwiegt die Rechtstheilung, so dass der Drehungswinkel schliesslich 70° ausmacht. Dieser Stamm ist noch dadurch interessant, dass in dem letzten Jahrhundert die Ernährung des Baumes eine so geringe war, dass die Streckung der Initialfasern und damit die Vermehrung derselben im Querschnitt nicht genügte, das Aufreissen des Holzkörpers zu verhindern. Der jüngere Holzkörper bildete

schliesslich nur noch ein schmales Spiralband, welches den alten Holztheil umschlingt.

In den beigefügten Figuren ist der geradfaserige, und linksdrehende Wuchs der Kiefer zur Darstellung gebracht. Wenn nach dem Vorstehenden auch verständlich geworden sein dürfte, worauf die Abweichungen des Faserverlaufs von der senkrechten Richtung zurückzuführen sind, so bleibt es anderentheils völlig unerklärlich, wesshalb die eine Kiefer bei ihren Zelltheilungen in der Initialschicht vorwiegend nach der einen, die andere vorwiegend nach der anderen Richtung hin die schrägen Quertheilungen ausführt. Aeussere Einflüsse scheinen dabei völlig ausgeschlossen zu sein und es ist höchst wahrscheinlich, dass es sich dabei lediglich um innere, individuelle und wahrscheinlich innerhalb gewisser Grenzen auch vererbliche Eigenschaften handelt.

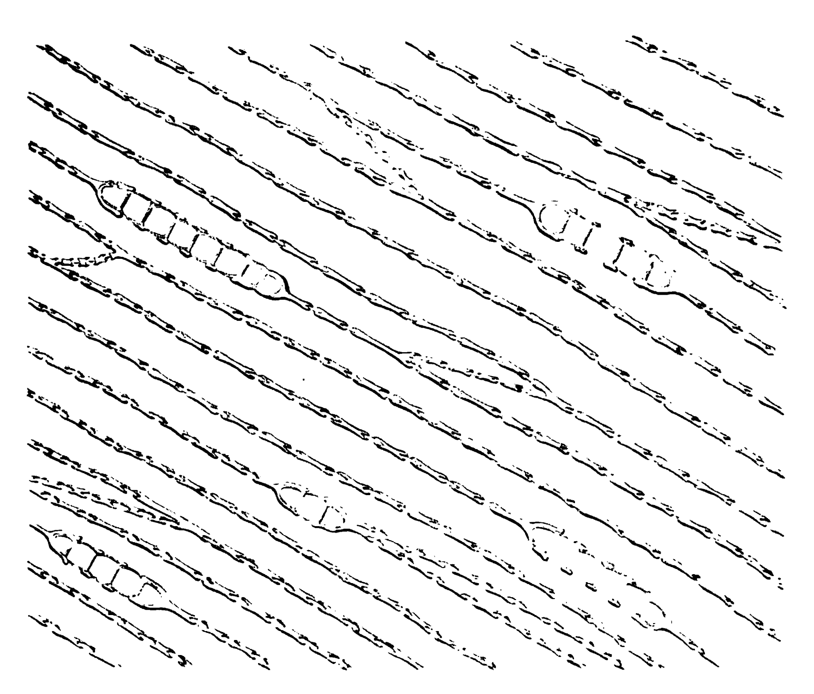
Zum Schlusse mag noch auf eine Eigenthümlichkeit im anatomischen Bau der stark drehwüchsigen Stammtheile hingewiesen werden. Bei dem geradfaserigen Holze (Fig. II) strömt naturgemäss das Wasser in der Längsrichtung der Tracheiden aufwärts und der Uebergang aus einer Tracheide zu der nächst höher stehenden erfolgt durch die mehr oder weniger schräg stehenden Q u e r w ä n d e. Diese sind durch dicht nebeneinanderstehende Hoftipfel ausgezeichnet, die als Durchgangspforten dienen. Die Längswände sind relativ tipfelarm, wenn auch immerhin die Tipfelzahl genügt, um eine seitliche Bewegung des Wassers in radialer Richtung zu ermöglichen.

Der anatomische Bau der stark drehwüchsigen Kiefern ist nun dadurch ausgezeichnet, dass die S e i t e n w ä n d e mit H o f t i p f e l n e b e n s o d i c h t b e d e c k t s i n d, a l s d i e Q u e r w ä n d e. Daraus ist wohl mit Sicherheit zu schliessen, dass

das Wasser nicht dem schrägen Verlaufe der Tracheiden folgt, sondern seinem Ziele, der Baumkrone, direct zuströmt.

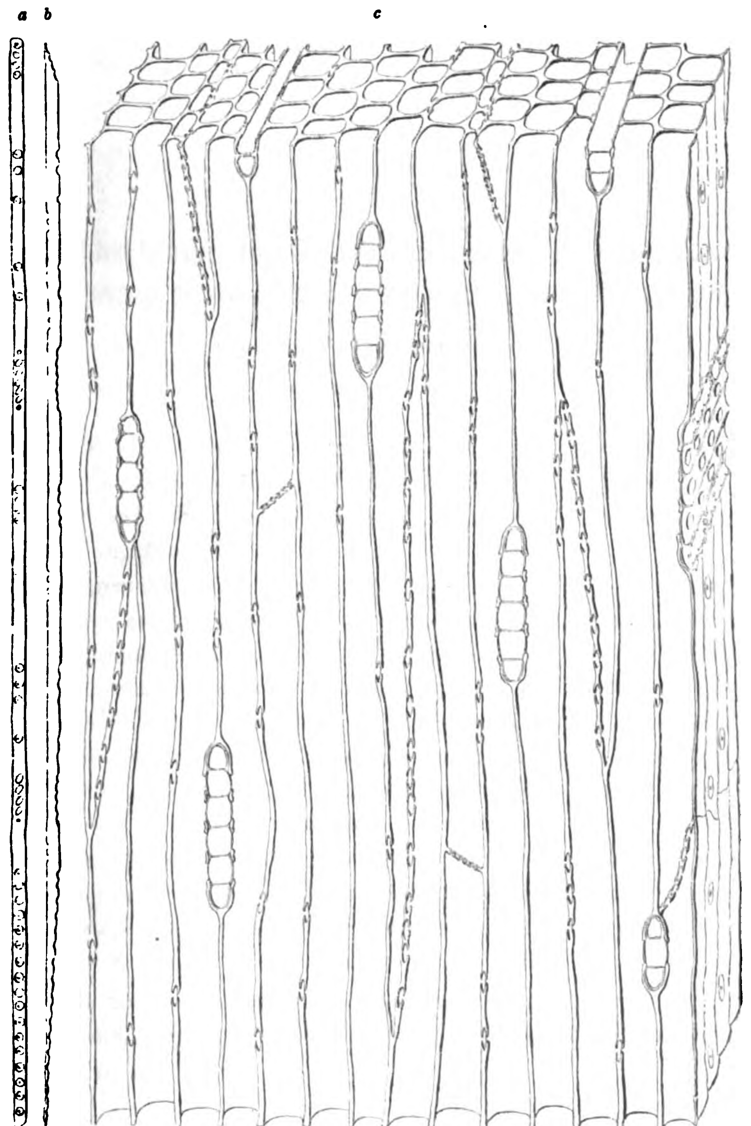
Erwähnenswerth dürfte ferner noch die Thatsache sein, dass bei den stark drehwüchsigen Kiefern die Tangentialwände der letzten Herbstholztracheiden mit kleinen Hoftipfeln ebenso dicht besetzt sind, als dies bei der Fichte, Tanne und Lärche der Fall ist, während an geradfaserigen Kiefern bekanntlich Hoftipfel auf den Tangentialwänden in der Regel fehlen.

Figur I.



Linksdrehendes Kiefernholz in Tangentialansicht. Auf fünf nach links aufsteigende Querwände kommt nur eine Rechtstheilung. Längswände mit zahlreichen Hoftipfeln.

Figur II.



Geradfaseriges Kiefernholz. *a* Leitungstracheide in radialer, *b* in tangentialer Ansicht. Vergr. 50 : 1. *c* Tangentialansicht eines körperlich dargestellten Holzstückes. Vier Querwände nach rechts, vier nach links aufsteigend. Vergr. 200 : 1.

Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 4. Mai.*)

Es sind zahlreiche Beispiele genau durchgeführt, bei denen es sich um die conforme Abbildung einer complexen Ebene auf eine andere handelt, und bei denen man die Abbildungsfunction als gegeben betrachtet, um die durch sie dargestellte Beziehung geometrisch zu verfolgen. Versucht man aus solchen Beispielen andere für die Hauptaufgabe der Abbildungstheorie (nämlich eindeutige conforme Abbildung eines gegebenen Flächenstückes auf den Einheitskreis oder die Halbebene) abzuleiten, so ist die Ausbeute eine sehr geringe; denn die verlangte Eindeutigkeit wird durch die Verzweigungspunkte der studirten Function in der Regel gerade da gestört, wo es sich um ein wesentlich neues Problem handeln würde. In manchen Fällen kann man indessen diese Störungen heben; und dies an einem Beispiele vollkommen durchzuführen, erschien mir als eine lehrreiche Aufgabe, der die folgenden Ausführungen dienen mögen.

1. Setzt man $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ und schreibt die Gleichung einer in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve in der Form

$$(1) \qquad f(z, z_1) = 0,$$

so besteht die Relation

(2) $$\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = -\frac{dz_1}{\frac{\partial f}{\partial z}};$$

und aus letzterer lässt sich nach meiner früheren Darstellung in manchen Fällen die conforme Abbildung eines von der Curve $f = 0$ umschlossenen Ovals auf die Halbebene ($Y > 0$) ableiten; es beruht dies darauf, dass in Folge von (2) die Function

(3) $$\frac{d\eta}{dZ} = \cdot i \frac{dz}{dZ} \cdot \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

auf dem Rande des Ovals reell ist, wenn $Z = X + iY$ einen Punkt der Bildebene bezeichnet.[1])

Die Curve (1) gehöre einem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln an, das durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

definirt sei; dann geht die Gleichung (1) über in

(4) $$(z^2 + z_1^2)(b^2 - a^2) + 2 z z_1 (a^2 + b^2 - 2\lambda) \\ - 4(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0;$$

und es wird

(5) $$\eta' = \frac{d\eta}{dZ} = \frac{i}{4\sqrt{z^2 - e^2}\sqrt{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}} \cdot \frac{dz}{dZ},$$
wenn $e^2 = a^2 - b^2$,

eine Function, die längs der Curve (4) reell ist; dasselbe gilt von ihrem logarithmischen Differentialquotienten

[1]) Vergl. Sitzungsbericht der phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. vom 7. Juni 1894.

$$(6) \qquad \frac{d \log \eta'}{d Z} = \frac{d \log z'}{d Z} - \frac{z}{z^2 - e^2} \cdot z', \quad \text{wo } z' = \frac{d z}{d Z}.$$

Letzterer ist von λ unabhängig; er ist gleich $\frac{d \log v'}{d Z}$, wenn

$$(7) \qquad v = \int \frac{d z}{\sqrt{z^2 - e^2}} = \log (z + \sqrt{z^2 - e^2}) = \log \zeta$$

gesetzt wird. Es ist vortheilhaft v oder ζ als neue Variable eingeführt zu denken. Vermöge der Substitution

$$(8) \qquad \frac{z}{e} = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \zeta = z + \sqrt{z^2 - e^2}$$

wird bekanntlich[1]) das System confocaler Ellipsen (mit den Brennpunkten $\pm e$) in der z-Ebene übergeführt in ein System concentrischer Kreise in der ζ-Ebene (mit dem Mittelpunkte $\zeta = 0$); die zugehörigen confocalen Hyperbeln gehen in die Radienvectoren der Kreise über; der Verbindungslinie der Brennpunkte (doppelt gezählt) entspricht in der ζ-Ebene der Einheitskreis. Jedem von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzten Polygone, das keinen Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande enthält, entspricht ein von Bögen concentrischer Kreise und deren Radien begrenztes Polygon.

Erstreckt sich keine Seite eines solchen Kegelschnittpolygons ins Unendliche, so sind alle Winkel an den Ecken gleich $\frac{\pi}{2}$ oder gleich $\frac{3\pi}{2}$. Bildet man die ζ-Ebene vermöge der Gleichung (7) auf eine v-Ebene ab, so wird das Polygon in ein geradliniges verwandelt, dessen Abbildung auf die Halbebene nach Christoffel sofort ausgeführt werden kann. Liegt kein Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande des abzubildenden Polygons, so haben wir also

[1]) Vergl. z. B. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, p. 130 ff. und Taf IX.

$$(9) \quad v = \log (z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi (Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi (Z - A_s)}} dZ + C'.$$

Hiebei bedeuten $B_1, B_2, \ldots B_n$ diejenigen Stellen der Axe $Y = 0$, denen je eine Ecke mit dem Winkel $\frac{3\pi}{2}$ im gegebenen Polygon entspricht, während den Punkten A_1, $A_2 \ldots A_m$ Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ zugeordnet sind. Es ist immer

$$(9\text{a}) \qquad m = n + 4,$$

so dass der Punkt $Z = \infty$ keine singuläre Stelle für die Abbildung liefert (wenn nicht zufällig eine der Grössen A_s, B_t unendlich gross wird).

2. Ist das gegebene Polygon im Endlichen geschlossen, wie im vorigen Falle, liegt aber ein Brennpunkt auf dem Rande (etwa $z = e$), so betrachten wir wieder die durch (6) gegebene Function $\frac{d \log v'}{d Z}$. Da jetzt die Relation

$$(10) \qquad m = n + 3$$

erfüllt ist, so ist die Function

$$\frac{d \log v'}{d Z} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{Z - B_t} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{Z - A_s} + \frac{1}{2} \frac{1}{Z - E},$$

wo der reelle Punkt E dem Brennpunkte e zugeordnet sei, überall (auch für $Z = \infty$) holomorph, also gleich einer Constanten. Das Verhalten im Brennpunkte bedarf nur noch einer Besprechung. Es besteht für $z = e$ eine Entwicklung der Form

$$(11) \qquad z - e = \varepsilon_1 (Z - E) + \varepsilon_2 (Z - E)^2 + \ldots,$$

und es ist demnach

$$\frac{z}{z^2-c^2}\frac{dz}{dZ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+c}+\frac{1}{z-c}\right)\frac{dz}{dZ}=\frac{1}{2}\frac{1}{Z-E}+\mathfrak{P}(Z-E)$$

wenn $\mathfrak{P}(Z-E)$ eine nach positiven Potenzen geordnete Reihe bedeutet; die betrachtete Function verhält sich also an der Stelle $Z=E$ in der That nicht singulär. Die Abbildung wird sonach durch eine Formel der folgenden Gestalt vermittelt:

$$\text{(10a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2}) = C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}\frac{dZ}{\sqrt{Z-E}}+C'.$$

Liegen beide Brennpunkte auf dem Rande des Polygons und entspricht der Werth $Z=E'$ dem Werthe $z=-c$, so finden wir in gleicher Weise:

$$\text{(12)}\qquad m = n+2,$$

$$\text{(12a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2}) = C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}\frac{dZ}{\sqrt{(Z-E)(Z-E')}}.$$

3. Es kann auch vorkommen, dass der Brennpunkt nicht nur auf dem Rande des Polygons liegt, sondern auch eine Ecke desselben bildet; das Polygon erscheint dann längs eines Stückes der reellen Axe, das vom betr. Brennpunkte ausgeht, aufgeschlitzt. Die Entwicklung (11) ist zu ersetzen durch

$$z-e = \delta_2(Z-E)^2+\delta_3(Z-E)^3+\dots.$$

Wir finden in gleicher Weise, da die Function $\frac{d\log v'}{dZ}$ an der Stelle $Z=E$ nicht unendlich wird:

$$\text{(13)}\qquad m = n+4,$$

$$\text{(13a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2}) = C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}dZ+C'.$$

Sind beide Brennpunkte Ecken des Polygons, so wird:

$$m = n + 4, \tag{14}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} dZ + C'. \tag{14a}$$

Liegt ein Brennpunkt auf dem Rande, während der andere als Ecke auftritt, so ist

$$m = n + 3, \tag{15}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{Z - E}} + C'. \tag{15a}$$

4. Liegt ein Brennpunkt im Innern des abzubildenden Polygons, so gilt wieder eine Entwicklung der Form (11); es bedeutet nun jetzt E einen Punkt im Innern der Halbaxe $Y > v$. Damit die Function (6) auf dem Rande reell sei, muss dann der conjugirte Punkt E_1 in gleicher Weise als singuläre Stelle vorkommen; es wird also:

$$m = n + 2, \tag{16}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z - E)(Z - E_1)}} + C'. \tag{16a}$$

Liegen beide Brennpunkte im Innern, so ist:

$$m = n, \tag{17}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z - E)(Z - E_1)(Z - E')(Z - E_1')}} + C'. \tag{17a}$$

Für $m = n = 0$ ergibt sich hieraus insbesondere die Schwarzsche Formel für das Innere einer Ellipse.

Liegt $z = e$ im Innern, $z = -e$ auf dem Rande des Polygons, so haben wir

$$m = n + 1, \tag{18}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-E)(Z-E_1)(Z-E')}} + C'. \tag{18a}$$

Liegt $z = e$ im Innern und ist $z = -e$ eine Ecke des Polygons, so wird

$$m = n + 2, \tag{19}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-E)(Z-E_1)}} + C'. \tag{19a}$$

5. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dass sich der unendlich ferne Punkt der z-Ebene im Innern des Polygons befindet, d. h. dass es sich um die Abbildung der Halbebene auf das Aeussere eines Polygons von der bisher betrachteten Gestalt handelt. Die Aufgabe erledigt sich in derselben Weise, wie die entsprechende Aufgabe bei geradlinigen Polygonen durch Christoffel[1]) Erledigung fand. Es sei $A + iB$ der Punkt, welcher dem Punkte $z = \infty$ zugeordnet wird, so dass eine Entwicklung der Form

$$\frac{1}{z} = \gamma_1 (Z - A - iB) + \gamma_2 (Z - A - iB)^2 + \dots . \tag{20}$$

besteht. Ist dann n die Zahl der Ecken mit den Winkeln $\frac{3\pi}{2}$, m diejenige mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, so können wir alle möglichen Fälle in den Gleichungen

1) Annali di Matematica, Serie 2, Bd. 4, 1870.

$$n = m + \nu \tag{21}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{U} + C', \tag{21a}$$

wo $U = (Z - E)^{\alpha}(Z - E_1)^{\alpha_1}(Z - E')^{\beta}(Z - E_1')^{\beta_1}[(Z - A)^2 + B^2]$

zusammenfassen; zur Ableitung der letzten Gleichung hat man die Function (6) an den einzelnen singulären Stellen zu entwickeln. Die einzelnen Fälle unterscheiden sich nun in folgender Weise:

1) Kein Brennpunkt liegt im Innern des abzubildenden Polygons (welches den unendlich fernen Punkt enthält):
$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

2) Ein Brennpunkt auf dem Rande:
$\nu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

3) Beide Brennpunkte auf dem Rande:
$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0.$

4) Ein Brennpunkt als Ecke:
$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

5) Beide Brennpunkte als Ecken:
$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

6) Beide Brennpunkte auf dem Rande und einer von ihnen als Ecke:
$\nu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

7) Ein Brennpunkt im Innern:
$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

8) Beide Brennpunkte im Innern:

$$\nu = 4, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

9) Ein Brennpunkt auf dem Rande, der andere im Innern:

$$\nu = 3, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0.$$

10) Ein Brennpunkt im Innern, der andere als Ecke:

$$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

Der Fall 1) liefert für $n = m = 0$ insbesondere die Schwarz'sche Formel für die Abbildung des Aeussern einer Ellipse. Der Fall 5) führt für $m = n = 0$ zu der bekannten (z. B. für die Kugelfunctionen wichtigen) Abbildung:

$$\frac{Z - A - iB}{Z - A + iB} = \alpha\,(z + \sqrt{z^2 - c^2}) + \beta.$$

6. Liegt der unendlich ferne Punkt der z-Ebene auf dem Rande des Polygons, ohne eine Ecke desselben zu bilden, so sind die Formeln (21) und (21a) zu ersetzen durch:

$$m = n + \nu, \tag{22}$$

$$\log\,(z + \sqrt{z^2 - c^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi\,(Z - B_i)}}{\sqrt{\Pi\,(Z - A_s)}} \frac{d\,Z}{U} + C', \tag{22a}$$

wo $U = (Z - E)^{\alpha}(Z - E_1)^{\alpha_1}(Z - E')^{\beta}(Z - E'_1)^{\beta_1}(Z - A)$

und wo der reelle Punkt $Z = A$ dem Punkt $z = \infty$ entspricht. Für die eben unterschiedenen 10 Fälle haben wir jetzt bez.:

$$\nu = 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0$$

zu setzen, während die zugehörigen Werthe von $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ ungeändert bleiben.

7. Ein neuer Ansatz wird nöthig, wenn der unendlich ferne Punkt der z-Ebene als Ecke des abzubildenden Polygons einfach oder mehrfach vorkommt, d. h. wenn sich das gegebene Flächenstück nach einer Richtung oder nach mehreren Richtungen (zwischen je zwei Hyperbelzweigen) ins Unendliche erstreckt. Vermöge der Abbildung (8) entspricht jetzt dem gegebenen Flächenstücke das Innere eines Kreisbogenpolygons, dessen Begrenzung durch concentrische Kreise und deren Radien gebildet wird und bei dem das gemeinsame Centrum mehrfach als Ecke vorkommt. Zwei im Centrum zusammentreffende Radien bilden den Winkel $\lambda\pi$, wenn in der z-Ebene die Asymptoten der entsprechenden Hyperbeläste denselben Winkel einschliessen. Statt des Punktes $\zeta = 0$ kann auch der Punkt $\zeta = \infty$ als Ecke des Kreisbogenpolygons vorkommen; es können auch beide Punkte gleichzeitig als Ecken in Betracht zu ziehen sein. Unser Problem ist hierdurch, falls die Brennpunkte nicht im Innern oder auf dem Rande liegen auf das Schwarz'sche Problem reducirt; es wird gelöst durch eine Differentialgleichung der Form

$$\{\zeta, Z\} = R(Z), \tag{23}$$

wenn in bekannter Weise

$$\{\zeta, Z\} = \frac{d^2 \log \frac{d\zeta}{dZ}}{dZ^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \frac{d\zeta}{dZ}}{dZ}\right)^2$$

gesetzt wird, und wenn $R(Z)$ eine rationale Function bezeichnet. Es seien wieder A_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ die reellen Punkte der Z-Ebene, welche aus den Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ hervorgehen, B_s $(s = 1, 2, \ldots m)$ diejenigen Punkte, denen Ecken mit den Winkeln $\frac{3\pi}{2}$ entsprechen, C_t die Punkte der Axe $Y = 0$, denen der Punkt $\zeta = 0$ als Ecke des Polygons entspricht und $\lambda_t \pi$ der zugehörige Winkel, endlich

D_u diejenigen Punkte, die aus einer Ecke $\zeta = \infty$ mit dem Winkel μ_u hervorgehen. Man findet:

$$\{\zeta, Z\} = \{z, Z\} + \frac{3\, e^2}{2\,(z^2 - e^2)^2} \left(\frac{dz}{dZ}\right)^2.$$

Die Differentialgleichung des Problems ist daher von der Form:

$$(24) \qquad \{z, Z\} + \frac{3\, e^2}{2\,(z^2 - e^2)^2} \left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

$$= \sum_r \left[\frac{3}{8} \frac{1}{(Z - A_r)^2} + \frac{\alpha_r}{Z - A_r}\right] + \sum_s \left[-\frac{5}{8} \frac{1}{(Z - B_s)^2} + \frac{\beta_s}{Z - B_s}\right]$$

$$+ \sum_t \left[\frac{1 - \lambda_t^2}{2\,(Z - C_t)^2} + \frac{\gamma_t}{Z - C_t}\right] + \sum_u \left[\frac{1 - \mu_u^2}{2\,(Z - D_u)^2} + \frac{\delta_u}{Z - D_u}\right];$$

und zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen:

$$(25) \begin{cases} \Sigma\, \alpha_r + \Sigma\, \beta_s + \Sigma\, \gamma_t + \Sigma\, \delta_u = 0, \\ \Sigma\, A_r\, \alpha_r + \Sigma\, B_s\, \beta_s + \Sigma\, C_t\, \gamma_t + \Sigma\, D_u\, \delta_u + \frac{3}{8}\, n - \frac{5}{8}\, m \\ \qquad + \frac{1}{2}\, \Sigma\, (1 - \lambda_t^2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, (1 - \mu_u^2) = 0, \\ \Sigma\, A_r^2 \alpha_r + \Sigma\, B_s^2 \beta_s + \Sigma\, C_t^2 \gamma_t + \Sigma\, D_u^2 \delta_u + \frac{3}{4}\, \Sigma\, A_r - \frac{5}{4}\, \Sigma\, B_s \\ \qquad + \Sigma\, (1 - \lambda_t^2)\, C_t + \Sigma\, (1 - \mu_u^2)\, D_u = 0. \end{cases}$$

Die Integration der Gleichung (24) ist vermöge (23) in bekannter Weise auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung zurückgeführt. Die rechte Seite von (24) ist hierbei gleich $R(Z)$, d. h. gleich der rechten Seite von (23), zu setzen.

8. Lassen wir zu, dass ein Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande des abzubildenden Flächenstückes liege, so sind an der rechten Seite von (24) gewisse Modificationen

anzubringen. Handelt es sich um den Brennpunkt $+e$, so besteht eine Entwicklung von der Form (11). Entwickelt man dann die linke Seite von (24) nach Potenzen von $Z-E$ und beachtet, dass, wenn E im Innern der Halbebene $Y>0$ liegt, der conjugirte Punkt E_1 in entsprechender Weise singulär sein muss, so wird das Problem im allgemeinsten Falle durch eine Gleichung der folgenden Form gelöst:

$$(26)\qquad \{z, Z\} + \frac{3\,e^2}{2\,(z^2-e^2)^2}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

$$= R(Z) + \frac{3}{8}\left[\frac{\varrho}{(Z-E)^2} + \frac{\varrho_1}{(Z-E_1)^2} + \frac{\varrho'}{(Z-E')^2} + \frac{\varrho_1'}{(Z-E_1')^2}\right] + \frac{\varkappa\cdot\sigma}{Z-E} + \frac{\varkappa_1\cdot\sigma_1}{Z-E_1} + \frac{\varkappa'\cdot\sigma'}{Z-E'} + \frac{\varkappa_1'\cdot\sigma_1'}{Z-E_1'}.$$

Hier bedeutet $R(Z)$ die rechte Seite von (24); $\varkappa_1$ ist zu $\varkappa$, $\varkappa_1'$ zu $\varkappa'$ conjugirt; $\varrho, \varrho_1, \varrho', \varrho_1', \sigma, \sigma_1, \sigma', \sigma_1'$ sind gleich 0 oder 1 je nach Lage der Brennpunkte; und zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen:

$$(27)\quad \begin{cases} B + \varkappa + \varkappa_1 + \varkappa' + \varkappa_1' = 0, \\ B' + \sigma\varkappa E + \sigma_1 E_1 + \sigma'\varkappa' E' + \sigma_1'\varkappa_1' E_1' = 0, \\ B'' + \sigma\varkappa E^2 + \sigma_1\varkappa_1 E_1^2 + \sigma'\varkappa' E'^2 + \sigma_1'\varkappa_1' E_1'^2 + \frac{3}{4}(\varrho E \\ \qquad + \varrho_1 E_1 + \varrho' E' + \varrho_1' E_1') = 0, \end{cases}$$

wo mit B, B', B'' die linken Seiten der entsprechenden Gleichungen (25) bezeichnet sind.

Die verschiedenen möglichen Fälle unterscheiden wir in derselben Weise durch Zahlen, wie dies in Nr. 5 geschah. Dann haben wir folgende Resultate:

1) Alle Grössen ϱ, σ sind Null; die Gleichung (26) ist mit (24) identisch.

2) $\varrho = \sigma = 1, \quad \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 0.$

3) $\varrho = \varrho' = \sigma = \sigma' = 1, \quad \varrho_1 = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0.$

4) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 0, \quad \sigma = 1.$

5) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0, \quad \sigma = \sigma' = 1.$

6) $\varrho = \sigma = \sigma' = 1, \quad \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0.$

7) $\varrho = \varrho_1 = \sigma = \sigma_1 = 1, \quad \varrho' = \varrho_1' = \sigma' = \sigma_1' = 0.$

8) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 1.$

9) $\varrho = \varrho' = \varrho_1' = \sigma = \sigma' = \sigma_1' = 1, \quad \varrho_1 = \sigma_1 = 0.$

10) $\varrho = \varrho_1 = \sigma = \sigma_1 = \sigma' = 1, \quad \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1' = 0.$

Ist $m = n = 0$, so findet man aus (1) insbesondere die Abbildung des von den beiden Zweigen einer Hyperbel eingeschlossenen Ebenenstückes; sie geschieht durch die Formel

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - e^2} = \alpha \left(\frac{Z-C}{Z-D}\right)^\lambda + \beta, \tag{28}$$

wo $\lambda\pi$ den von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Die Formel (28) folgt direct aus der bekannten Gleichung für die Abbildung eines Kreisbogen-Zweiecks.

9. Aus (7) leiten wir die Abbildung des von einem Hyperbelzweige eingeschlossenen Flächenstückes ab. Hat λ dieselbe Bedeutung wie in (28), so ist der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel hier gleich $(1-\lambda)\pi$. Sei $\mu = 1 - \lambda$, $E = i$, $E_1 = -i$, so ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\{\zeta, Z\} = \frac{1-\mu^2}{2} \frac{1}{(Z-C)^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{(Z-i)^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{(Z+i)^2} + \frac{\gamma}{Z-C} + \frac{\varkappa}{Z-i} + \frac{\varkappa_1}{Z+i},$$

und die Gleichungen (25) werden:

$$\gamma + \varkappa + \varkappa_1 = 0,$$
$$\gamma C + \varkappa E + \varkappa_1 E_1 + \frac{3}{4} + \frac{1-\mu^2}{2} = 0,$$
$$\gamma C^2 + \varkappa E^2 + \varkappa_1 E_1^2 + C(1-\mu^2) = 0.$$

Wir wählen $C = \infty$ und finden dann:

$$\gamma = 0, \quad \varkappa = - \varkappa_1 = i \frac{1 + 2\mu^2}{8};$$

die Differentialgleichung wird:

$$\{\zeta, Z\} = \frac{3}{4} \frac{Z^2 - 1}{(Z^2 + 1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1 + 2\mu^2}{Z^2 + 1}; \tag{29}$$

ihre Integration geschieht durch die lineare Gleichung:

$$(Z^2 + 1) \frac{d^2 \Theta}{d Z^2} + Z \frac{d \Theta}{d Z} - \frac{\mu^2}{4} \Theta = 0.$$

Die particulären Integrale der letzteren sind:

$$\Theta_1 = (Z + \sqrt{Z^2 + 1})^{\frac{\mu}{2}}, \quad \Theta_2 = (Z - \sqrt{Z^2 + 1})^{\frac{\mu}{2}}$$

Das allgemeine Integral von (29) ist eine lineare Function von $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$, also

$$\frac{a \zeta + b}{c \zeta + d} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = (Z + \sqrt{Z^2 + 1})^{\mu}. \tag{30}$$

Durch diese Formel wird die Abbildung der Halbebene auf den von einem Hyperbelaste begrenzten Theil der Ebene vermittelt; und zwar liegt letzterer auf der concaven Seite der Hyperbel, wenn $\mu < 1$ ist, auf der convexen Seite im andern Falle; $\mu \pi$ ist der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel.

Dasselbe Resultat erhält man nach einer früher von mir angegebenen Methode. Es sei die Gleichung einer Cassinischen Curve in der Form

$$(z - a)(z_1 - a)(z + a)(z_1 + a) = c^2 \tag{31}$$

gegeben, so dass die reellen Punkte a und $-a$ als gemeinsame Brennpunkte der vom Parameter c abhängigen Curvenschaar auftreten. Ausserdem hat die Curve zwei andere Brennpunkte:

man findet sie, indem man die vom unendlich fernen Kreispunkte $z = 0$ ausgehenden Tangenten mittelst der Relation $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$ bestimmt; nun ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = z_1^2 (z^2 - a^2)^2 = (z^2 - a^2)[c^2 + a^2 (z^2 - a^2)];$$

wir haben also die vier Brennpunkte

$$z = \pm a \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^4 - c^2}.$$

Ist $a^4 > c^2$, so besteht die Curve aus zwei Ovalen; von dem einen wird die positive Axe in den Punkten $\sqrt{a^2 - c}$ und $\sqrt{a^2 + c}$ getroffen; zwischen beiden liegen die Brennpunkte a und $\frac{1}{a}\sqrt{a^4 - c^2}$. Die Abbildung eines solchen Ovals, das zwei Brennpunkte umschliesst, auf die Halbebene $Y > 0$ geschieht nach jener Methode durch die Gleichung

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)[c^2 + a^2 (z^2 - a^2)]}} \tag{32}$$
$$= C \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z - A)(Z - A_1)(Z - B)(Z - B_1)}} + C',$$

wenn die Punkte A, B den beiden inneren Brennpunkten entsprechen und wenn A_1, B_1 bez. zu A, B conjugirt sind.

Wird jetzt $c = a^2$, so erhält die Curve (31) einen Doppelpunkt im Anfangspunkte, in den auch der von c abhängige Brennpunkt hineinrückt; auch B fällt mit B_1 zusammen und wird reel; und die Formel (32) geht über in:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dz}{z \sqrt{z^2 - a^2}} = C \int \frac{dZ}{(Z - B)\sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + C'. \tag{33}$$

Hierdurch ist die Abbildung des Innern einer Schleife einer Lemniscate auf die Halbebene vermittelt.

Schliessen die Tangenten des Doppelpunktes den Winkel $\mu\pi$ ein, so muss für $z = 0$ eine Entwicklung der Form

$$z = (Z - B)^{\mu}\,\mathfrak{P}(Z - B)$$

bestehen; es wird also

$$\frac{dz}{z} = \mu\frac{dZ}{Z - B} + \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}\,dZ.$$

In (33) müsste daher $a^2 C = i\mu(A - B)$ gesetzt werden. Für eine eigentliche Lemniscate muss allerdings $\mu = \frac{1}{2}$ genommen werden, denn sie wird aus einer gleichseitigen Hyperbel durch die Transformation $z = t^{-1}$ gewonnen. Durch letztere Transformation werden aber aus beliebigen Hyperbeln Curven erhalten, die den Lemniscaten ganz analog sind, und bei denen μ beliebig bleibt (vgl. unten Nr. 9). Sie haben gleichfalls nur zwei Brennpunkte, und für sie gilt also auch die Formel (33). Lassen wir $B = \infty$, $A = i$, $A_1 = -i$, $a = e^{-1}$ werden, so folgt:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - e^2}} = \mu \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 + 1}} + C,$$

woraus wiederum die Gleichung (30) gewonnen wird; es ist nur nachträglich t mit z zu vertauschen.

Denkt man sich den Punkt i der Z-Ebene durch einen beliebigen Punkt B der Halbebene $Y > 0$ ersetzt, ebenso $-i$ durch den conjugirten Punkt B_1 und lässt sodann $e = 0$ werden, so nähern sich auch B und B_1 demselben reellen Werthe B_0 und die Gleichung (30) gibt

$$\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = (2Z - B_0)^{\mu}.$$

Es entsteht also in der That die bekannte Formel für die Abbildung der Halbebene auf den von zwei Geraden

(hier den Asymptoten der Hyperbel, in welche letztere für $e = 0$ zerfällt) eingeschlossenen Winkelraum.

10. Die hier befolgte Methode wird man auch in anderen Fällen anwenden können, in denen die Abbildung eines gegebenen Curvensystems der z-Ebene auf ein System von Kreisen der ζ-Ebene bekannt ist, sobald nur $\{\zeta, z\}$ eine rationale Function von z ist. Selbstverständlich gelingt dies bei dem Systeme confocaler Parabeln, da dasselbe aus dem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln durch Grenzübergang gewonnen werden kann.

Ferner kommt das System von Curven in Betracht, das aus den confocalen Ellipsen und Hyperbeln durch die Transformation $t = z^{-1}$ hervorgeht. Sei $t = \sigma + i\tau$, so sind dies die Curven:

$$(34) \qquad \begin{aligned} (\sigma^2 + \tau^2)^2 (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) + 4\lambda(\sigma^2 + \tau^2) \\ - 4a^2\sigma^2 - 4b^2\tau^2 = 0. \end{aligned}$$

Sie haben sämmtlich im Anfangspunkte einen Doppelpunkt. Für $\lambda < b^2$ $(a^2 > b^2)$ ist derselbe isolirt, für $\lambda > b^2$ hat die Gestalt der Curve Aehnlichkeit mit derjenigen einer gewöhnlichen Lemniscate; eine solche findet man für $2\lambda = a^2 + b^2$, sie entspricht der gleichseitigen Hyperbel

$$\sigma^2 - \tau^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

Ist $t_1 = \sigma - i\tau$, und wird die linke Seite von (34) für den Augenblick mit φ bezeichnet, so sind die Brennpunkte durch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}$ bestimmt. Wir haben $\varphi(t_1, t_1) = t^2 t_1^2 f(z, z_1)$, also:

$$\frac{1}{t^2 t_1^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} - \frac{2}{t^2 t_1^3}\varphi = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{1}{t_1^2}$$

Nun war in Nr. 1:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = 16\,(z^2-c^2)\,(a^2-\lambda)\,(b^2-\lambda),$$

also vermöge $\varphi = 0$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^2 = t^4\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = 16\,(1-c^2t^2)\,t^2\,(a^2-\lambda)\,(b^2-\lambda)$$

Jede Curve des Systems (34) hat daher nur die beiden (allen gemeinsamen) Brennpunkte $t = \pm c^{-1}$, wie es geometrisch nach der Theorie der Cremona'schen Transformation selbstverständlich ist.

Ein anderes Beispiel gibt die Transformation

$$\zeta = z^2$$

Den Parallelen zu den Axen der ζ-Ebene entsprechen zwei Orthogonalschaaren von gleichseitigen Hyperbeln.[1]) Die Abbildung eines von letzteren gebildeten Polygons geschieht also, indem man die Function

$$\frac{d \log \frac{d\zeta}{dZ}}{dZ} = 2\,\frac{d}{dZ}\log\left(z\frac{dz}{dZ}\right)$$

als rationale Function von Z bestimmt. Einer beliebigen geraden Linie der ζ-Ebene entspricht eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkte $z = 0$; auch für Polygone, deren Begrenzung durch beliebige concentrische gleichseitige Hyperbeln gegeben wird, ist also diese Methode anwendbar.[2])

Einem beliebigen Kreise der ζ-Ebene entspricht eine Cassini'sche Curve der z-Ebene, deren Mittelpunkt an der

---

[1]) Vgl. Holzmüller a. a. O. p. 105 ff.

[2]) Es ist dies schon von Sanio angegeben: Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogenpolygons. Königsberger Inauguraldissertation 1885.

Stelle $z = 0$ liegt; dieselbe ist eine gewöhnliche Lemniscate, wenn der Kreis durch den Punkt $\zeta = 0$ hindurchgeht. Die Abbildung der Halbebene $Y > 0$ auf Polygone, deren Begrenzung durch Bögen concentrischer Cassini'scher Curven gebildet wird, ist also zurückgeführt auf Bestimmung der Function

$$\{\zeta, Z\} = \{z, Z\} + \frac{3}{2}\frac{1}{z^2}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

in ihrer Abhängigkeit von Z.

In ähnlicher Weise wird man zahlreiche Beispiele, die von Holzmüller und Anderen behandelt sind, verwerthen können.

Ueber eine neue Bestimmung der Refractionsconstante auf astronomischem Wege.

Von J. Bauschinger.

(Eingelaufen 4. Mai.)

Die Bestimmung der Refractionsconstante, also physikalisch gesprochen des Brechungsexponenten der Luft gehört zu den schwierigsten und wichtigsten Aufgaben der praktischen Astronomie. Die Schwierigkeiten liegen einerseits in schwer zu bestimmenden Instrumentalfehlern, insbesondere den Biegungsverhältnissen des Fernrohrs, andererseits in der Complicirtheit der atmosphärischen Factoren, welche auf die Refraction von Einfluss sind und deren Wirkungen nur mit Mühe von einander zu trennen und zu bestimmen sind. Die Wichtigkeit einer möglichst genauen Erforschung aller auf die Refraction einwirkenden Umstände liegt darin, dass das ganze Declinationssystem der Gestirne, also die Hälfte der Coordinatenbestimmungen der messenden Astronomie, auf der Annahme über die Refractionsconstante beruht, und dass ein wirklicher Fortschritt in der Verfeinerung der absoluten Messungen erst dann constatirt werden kann, wenn er Hand in Hand geht mit einer genaueren Einsicht in die Refractionsverhältnisse.

Der schöne Repsold'sche Meridiankreis, welchen die Münchener Sternwarte im Jahre 1891 erhielt, zeigte bei den ersten Prüfungen so hervorragende Eigenschaften, dass der

Gedanke, dieselben zu einer neuen Untersuchung der Refraction auszunutzen, umsoweniger abzuweisen war, als in München eine derartige Untersuchung überhaupt noch nicht ausgeführt wurde, und als die mit diesem Instrument ersten Ranges in Aussicht genommenen fundamentalen Messungen ohne eine solche Untersuchung bei den möglicherweise vorhandenen localen Einflüssen einen bedenklichen Mangel der Fundirung aufweisen würden. Die ersten Jahre der Beobachtungsthätigkeit an diesem Instrument sind daher nach der Bestimmung des Herrn Professor H. Seeliger der Untersuchung der Refraction gewidmet worden. Eine demnächst im III. Bande der „Annalen der k. Sternwarte zu München" erscheinende umfangreiche Abhandlung gibt ausführliche Rechenschaft hierüber, während hier versucht werden soll, die wesentlichsten Resultate auszugsweise zusammenzustellen.

Die Methode der Untersuchung war die bekannte und mit dem Meridiankreis einzig mögliche durch Beobachtung der Circumpolarsterne in ihrer oberen und unteren Culmination. Ein Hauptaugenmerk wurde auf die Erlangung möglichst zahlreicher Messungen in geringen Höhen gerichtet, Beobachtungen, welche ebenso wichtig als schwierig zu erlangen sind und in dieser Menge, wie sie zu unserer Untersuchung verwendet werden konnten, auch kaum noch irgendwo vorliegen dürften. Die meteorologischen Elemente wurden an sorgfältig geprüften Instrumenten abgelesen und zwar sind nicht nur der Luftdruck und die äussere Lufttemperatur gemessen worden, sondern auch die Luftfeuchtigkeit und die Temperatur im Beobachtungsraume; letztere an fünf symmetrisch in der Beobachtungsspalte aufgehängten Thermometern. Die Fehler des Meridiankreises selbst sind genau untersucht worden, doch muss hierüber auf die Abhandlung verwiesen werden; hier sei nur angeführt, dass der mittlere Fehler der Theilung des Kreises bei Ablesung von vier Mikroskopen zu $\pm$ 0."24 gefunden wurde; da die Gestirne symmetrisch in

beiden Lagen des Kreises beobachtet wurden, so stellt sich also der von der Theilung herrührende Fehler im Mittel auf $\pm$ 0."17; ferner muss erwähnt werden, dass jener Fehler, der bisher am verhängnissvollsten auf die Messungen der Zenithdistanzen von Gestirnen in geringen Höhen und in Folge dessen auf die Bestimmung der Refractionsconstante eingewirkt hat, nämlich die Biegung des Fernrohres, beim Repsold'schen Instrument als unmessbar klein gefunden wurde, sich also sicher nicht über 0."1 erhebt.

Die Beobachtungen sind von vorneherein so angelegt worden, dass es möglich war, die Veränderlichkeit der Polhöhe unabhängig von anderen Beobachtungen zu bestimmen und in Rechnung zu ziehen; die gefundenen Variationen sind in guter Uebereinstimmung mit den anderwärts ermittelten. Die Genauigkeit der Beobachtungen ist aus der Uebereinstimmung der Einzelmessungen eines Gestirnes untereinander bestimmt worden; es fand sich der mittlere Fehler einer absoluten Beobachtung der Zenithdistanz (abgesehen vom Theilungsfehler) zu

$$\mu = \sqrt{0.''32^2 + 0.''23^2 \, tg\, z^2} \qquad (z = \text{Zenithdistanz})$$

eine Zahl, die am besten geeignet ist, die Vortrefflichkeit des Instrumentes zu erweisen und das Vertrauen in die Sicherheit der erlangten Resultate zu befestigen.

Die Untersuchung der auf die Refraction bezüglichen Verhältnisse wurde mit der Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten der Luft begonnen. Den bei der ersten Reduction der Beobachtungen angewandten Refractionstafeln von Radau liegt der Regnault'sche Werth 0.003663 (für Centigrade) zu Grunde, der sich von den bisherigen sichersten astronomischen Bestimmungen

Bessel	0.003644
Gyldén	0.003689
Pond (Chandler)	0.003650

so wenig unterscheidet, dass eine irgendwie bedeutende Correction desselben ausgeschlossen erschien. Die trotz dieser Aussicht begonnene Untersuchung hat aber nach einer anderen Richtung zu einem ziemlich sicheren Resultate geführt, das nicht ohne Bedeutung zu sein scheint. Das eingeschlagene Verfahren war folgendes: Es wurden nur beigezogen die Sterne zwischen 60° und 85° nördlicher Zenithdistanz, indem jene mit geringerer Z.D. nur einen minimalen Beitrag zur Lösung der Aufgaben liefern können, jene mit grösserer aber anderweitigen Störungen in einem Maasse unterliegen, dass sie die Einflüsse einer geringen Aenderung des Temperaturcoefficienten verwischen müssen. Von jedem Sterne wurden die bei den vier höchsten und die bei den vier niedrigsten Temperaturen erhaltenen Zenithdistanzen in je ein Mittel vereinigt und die Differenz $z_1 - z_0$ der beiden Gruppen genommen, zugleich mit der Differenz der Mittel der Temperaturen $t_1 - t_0$; dieses Verfahren bewirkt, dass die erlangten Differenzen unabhängig werden von der Refractionsconstante selbst und von der noch ungelösten Frage über den Einfluss der Saalrefraction. Die Unterschiede der Temperaturen steigen bis zu 21° und liessen ein sicheres Resultat erwarten. Ist $\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ der Factor, mit dem der Ausdehnungscoefficient 0,003663 multiplicirt werden muss, um den den Beobachtungen entsprechenden zu erhalten, und ist R die Refraction für die Temperatur 0° C und den mittleren Barometerstand 718 mm, dann werden die Bedingungsgleichungen, wenn die ganz belanglosen Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden, von der Form:

$$(t_1 - t_0)\ 0.003663\ \frac{R}{100}\, i = z_1 - z_0.$$

Wider Erwarten fand sich aus 45 solchen Bedingungsgleichungen ein ungewöhnlich grosser Werth von i, nämlich $i = 3.19 \pm 0.91$, womit der Ausdehnungscoefficient wird

$$0.003663\,(1 + 0.0319) = 0.003780 \pm 0.000033.$$

Es ist kein Zweifel, dass diese Erhöhung des Ausdehnungscoefficienten um 3 Procent ganz unzulässig ist und zu unlösbaren Widersprüchen mit den physikalischen Bestimmungen führen würde. Es hat zwar Gyldén aus der Discussion von Sommerbeobachtungen einen ähnlichen Werth, nämlich 0.003769 gefunden und Mascart hat durch physikalische Methoden sogar noch einen grössern Werth, nämlich 0.00382 abgeleitet, allein diese Bestimmungen stehen vereinzelt und dürften nicht einwandfrei sein, ersterer schon desshalb, weil er eben nur für die Sommerbeobachtungen gilt, während die Winterbeobachtungen einen viel kleineren Werth ergeben; der Mascart'sche Werth aber ist durch neuere Versuche von Benoît widerlegt worden (siehe Kayser und Runge, Die Dispersion der Luft, Abh. der Berl. Akad. 1893).[1])

Es könnte die Ursache des grossen Unterschiedes zwischen dem oben gefundenen Werth und den früheren astronomischen Bestimmungen darin gesucht werden, dass bei ersterem der Dampfdruck in Rechnung genommen wurde, während dies bei den anderen nicht geschah, allein eine einfache Ueberschlagsrechnung zeigt, dass bei Nichtberücksichtigung des Dampfdruckes die Unterschiede $z_1 - z_0$ noch stärker positiv werden, also i noch grösser. Hierin liegt ein Beweis für die Nothwendigkeit, bei der Berechnung der Refraction den Dampfdruck beizuziehen, zugleich aber auch ein Hinweis auf eine andere mögliche Erklärung der durch die Beobachtungen gebotenen Differenzen $z_1 - z_0$. Ich suche deren Entstehung in der nicht ganz zutreffenden Inrechnungnahme

---

1) Nachträglich finde ich noch, dass Nyrén aus den Pulkowaer Vertikalkreisbeobachtungen 1882—1891 den Werth 0.003770 für 1° C abgeleitet hat, also einen mit dem von mir gefundenen fast identischen; er hat es aber ebenfalls nicht gewagt, denselben bei der Reduction der Beobachtungen zu benutzen.



des Dampfdruckes bei den Radau'schen Tafeln. Radau hat zur Berechnung der sogenannten „optischen Dichtigkeit" der Luft vorgeschlagen den Ausdruck

$$\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\pi}{760}\right) B \quad \text{statt } B \qquad \begin{cases} \pi & \text{Dampfdruck} \\ B & \text{Barometerstand} \end{cases}$$

zu benutzen, worin der Factor $\frac{1}{8}$ lediglich empirisch ist und aus den Experimenten von Fizeau und Jamin abgeleitet wurde. Die theoretische Berechtigung dieser Gegenüberstellung von optischer und physikalischer Dichtigkeit ist nun schwer einzusehen, während es viel näher liegt, die brechende Kraft der Luft proportional der physikalischen Dichtigkeit zu setzen, welche bekanntlich proportional

$$\left(1 - 0.378\,\frac{\pi}{760}\right) B \text{ oder nahe } \left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{\pi}{760}\right) B$$

anzunehmen ist. Um die Frage, welche Dichtigkeit für die Refraction massgebend ist, objectiv zu entscheiden, ist es offenbar der sicherste Weg, den Factor, mit welchem π in Rechnung zu setzen ist, aus den Beobachtungen selbst abzuleiten; dieser Weg führt aber unmittelbar zu den Differenzen $z_1 - z_0$, da die Extreme der Temperatur im Allgemeinen mit den Extremen des Dampfdruckes zusammenfallen. Ist $\frac{k}{8}$ der zu bestimmende Factor, so werden die Gleichungen von der Form

$$0.12\, m\, (\pi_1 - \pi_0)\, (k - 1) = z_1 - z_0,$$

worin m die Aenderung der Refraction für 1 mm Quecksilberdruck bedeutet. Die Auflösung derselben ergab

$$k \quad 1 = 3.37 + 0.69.$$

Die Beobachtungen entscheiden also für die Anwendung der physikalischen Dichtigkeit. Die dann übrig bleibenden Fehler

$z_1 - z_0$ lassen weder in der Anordnung nach der Zenithdistanz, noch in jener nach der Rectascension ein systematisches Verhalten erkennen, womit zugleich der Nachweis gegeben ist, dass nach Einführung des neuen Factors von π die Beobachtungen eine Aenderung des angewandten Ausdehnungscoefficienten der Luft nicht erheischen.

Die Ermittelung der Refractionsconstante geschah durch Vergleichung der in der oberen und unteren Culmination erhaltenen Declinationen. Ist

δ die Declination aus den oberen Culminationen,
δ' „ „ „ „ unteren „
r die Refraction für die obere Culmination,
r' „ „ „ „ untere „
$\Delta\varphi$ die Correction der angewandten Polhöhe,
$(1+n)$ der Factor, mit dem die benutzte Refraction, welche hier auf den Radau'schen Tafeln, also der Bessel'schen Refractionsconstante (Tab. Reg.) beruht, zu multipliciren ist, um die den Beobachtungen entsprechende zu erhalten,

so hat man die Beziehung

$$\delta - \delta' = -2\Delta\varphi \mp rn - r'n \quad \begin{cases} \text{obere Culm. nördl. v. Zenith} \\ \text{obere Culm. südl. v. Zenith} \end{cases}$$

oder wenn $-2\Delta\varphi = x$, $-100\,n = y$ gesetzt wird:

$$\delta - \delta' = x + y \frac{+r + r'}{100}.$$

Die hiesigen Beobachtungen gestatteten die Aufstellung von 76 solcher Gleichungen; die Zenithdistanzen in unterer Culmination geben von 43°6′ bis 88°49′, die Factoren $+r+r$ von 100″ bis 1420″. Die Auflösung ergab

$$x = -0\overset{''}{.}797, \qquad y = +0.510. \qquad (1)$$

Die starke Verminderung der Bessel'schen Refractionsconstante, die sich in diesem Werth von y ausspricht, ist zwar auch schon durch die Discussion anderer neuerer Beobachtungsreihen gefunden worden, muss aber doch mit grosser Vorsicht aufgenommen werden. Wenn man nämlich die Bedingungsgleichungen in zwei Gruppen theilt, von denen die erste bis 76° Z.D. reicht, die andere bis in die Nähe des Horizontes, so ergibt die Auflösung der ersten Gruppe

$$x = -0.''047, \qquad y = -0.028 \tag{2}$$

und die der zweiten

$$x = -0.''575, \qquad y = +0.483. \tag{3}$$

Da die Resultate dieser beiden Auflösungen auf keine Weise zu vereinigen sind, hätte man zu schliessen, dass bei den grösseren Zenithdistanzen noch andere Factoren wirksam sind, als die bisher in Betracht gezogenen. Man wird zunächst den Grund der Missstimmung in der nicht völlig zutreffenden Hypothese über die Temperaturabnahme in der Atmosphäre suchen, von der ausschliesslich die Beobachtungen von 76° Z.D. ab beeinflusst werden, während bekanntlich die Refractionen bis 76° Z.D. von jeder Annahme über die Constitution der Atmosphäre völlig unabhängig sind. Den Radau'schen Tafeln liegt die Ivory'sche Hypothese zu Grunde mit dem Factor $f = 0.2$; nimmt man den wahren Werth von f zu $\frac{2+z}{10}$ an, so wird die durch z herbeigeführte Aenderung der Refraction gleich $-\lambda z$, wo der Factor λ der Radau'schen Tafel V entnommen werden kann, und die Bedingungsgleichungen erhalten folgende Form:

$$\delta - \delta' = x + y\,\frac{+r+r'}{100} + \lambda z.$$

Werden sie neu aufgelöst, so ergibt sich

$$x = -0.''828, \quad y = +0.527, \quad z = -0.053, \tag{4}$$

woraus durch Vergleichung mit (1) zu erkennen ist, dass durch die Einführung von z eine wesentliche Verbesserung der Darstellung der Beobachtungen nicht erzielt wird, und zugleich, dass die Constante $f = 0.2$ der Ivory'schen Hypothese völlig den Beobachtungen entspricht. Also auch durch eine andere Annahme über f ist die Missstimmung zwischen den beiden Gruppen nicht zu beseitigen.

Man wird weiter daran denken, dass bei den tieferen Culminationen das Sternbild in ein Spectrum auseinandergezogen erscheint, und dass man den Brechungsexponenten für weisses Licht, den die höheren Culminationen liefern, aus ihnen nur dann erhalten wird, wenn man eine ganz bestimmte Stelle des Spectrums einstellt. Um hier klar zu sehen, wollen wir die Brechungsexponenten aus den Auflösungen (2) und (3) ableiten. Dieselben finden sich, reducirt auf 760 mm Quecksilberdruck, 0° C Temperatur und 6 mm Dampfdruck zu

aus (2)	1.000 2933
aus (3)	1.000 2918

Vergleicht man damit die Resultate, welche Kayser und Runge (a. a. O.) aus physikalischen Bestimmungen für die hier in Betracht kommenden Fraunhofer'schen Linien erhalten haben (für denselben Luftzustand):

A	1.000 2902
B	2908
C	2911
D	2919
E	2930
F	2940

so erkennt man, dass der Werth aus (2) in Grün liegt; der Werth aus (3) dagegen würde darauf hindeuten, dass bei den Beobachtungen der tiefer culminirenden Sterne die Ein-

stellung an der Grenze zwischen Roth und Gelb erfolgte. Es würde dies im Einklang stehen mit der Wahrnehmung, dass die Sternspectra, wenn sie deutlich sichtbar waren, immer nur rothe und gelbe Strahlen zeigten; in den weitaus zahlreichsten Fällen, wo das Sternbild sich als verwaschener Fleck darstellte, würde also die Einstellung nicht auf Gelb, wie beabsichtigt war, sondern auf eine Stelle zwischen Roth und Gelb erfolgt sein. Der Unterschied zwischen den Auflösungen (2) und (3) liesse sich damit erklären, zugleich aber wäre damit der Nachweis erbracht, dass tiefer culminirende Sterne, sobald ihr Spectrum eine gewisse Ausdehnung erreicht, überhaupt nicht mehr zur Ermittelung der Refractionsconstante herbeigezogen werden dürfen, wenn man nicht etwa Mittel besitzt, ganz bestimmte Stellen des Spectrums einzustellen, was vielleicht durch Blendgläser von genau bestimmten Spectralfarben zu erreichen wäre. Lässt man diese Erklärung als stichhaltig gelten, so hängt die Ermittelung der bei astronomischen Beobachtungen zu gebrauchenden Refractionsconstante jetzt von der Bestimmung der grössten Zenithdistanz ab, die man noch beiziehen darf, ohne über die unbekannte Constitution der Atmosphäre eine Hypothese machen zu müssen und ohne durch die Ausdehnung des Spectrums in Unsicherheit über den eingestellten Punkt zu gerathen. Man leitet leicht ab, dass diese Grenze bei etwa 80° Z.D. liegt; zieht man aber dieser Ueberlegung folgend nur die Sterne bis 80° Z.D. zur Bestimmung der Refractionsconstante heran, so erhält man folgendes Auflösungssystem

$$x = -0\overset{''}{.}685, \qquad y = +0.442 \tag{5}$$

das so nahe mit (1) übereinstimmt, dass das Bedenken, das wir oben gegen (1) äusserten, nämlich dass gerade die genauesten Beobachtungen bis 76° Z.D. wesentlich besser durch die ungeänderte Bessel'sche Refractionsconstante dargestellt

werden als durch eine kleinere, fortbesteht und durch die eben versuchte Erklärung als nicht beseitigt gelten kann.

Wenn wir fortgesetzt die Ursache dieser Missstimmung in der Refraction suchen, so bleibt, so weit ich sehe, jetzt nur mehr die Refraction durch den Beobachtungsraum, herrührend von der Verschiedenheit der inneren und äusseren Temperatur übrig, deren Einfluss die widersprechenden Resultate beseitigen könnte. Dieselbe soll jetzt untersucht werden. Beachtet man, dass in dem Ausdruck der Refraction

$$R = \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\frac{\mu r}{\mu_0 r_0} - \sin z^2}} \cdot \frac{d\mu}{\mu} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \text{Brechungsindex,} \\ r = \text{Abstand der Schicht} \\ \quad \text{vom Erdmittelpunkt} \end{array} \right.$$

der Quotient $\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}$ so nahe gleich 1 ist, dass man ihn behufs Ermittelung eines ersten Näherungswerthes von R damit identificiren darf, so ergibt sich als solcher

$$(R) = tg\, z \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} = tg\, z \log. \text{nat.}\, \mu_0$$

Hieraus ist ersichtlich, dass in der Hauptsache die Refraction lediglich von μ_0, d. h. von dem Zustande der Atmosphäre in der untersten Schicht abhängig ist. Dies weist darauf hin, dass gerade die Brechung in der letzten Schicht, wenn der Lichtstrahl in das Fernrohr eintritt, die massgebende ist, d. h. also die Schicht im Beobachtungsraum. Die Folge hievon wäre, dass man der Berechnung der Refraction die innere Temperatur zu Grunde legen muss und nicht die äussere. Natürlich kann dies nicht dadurch geschehen, dass man die innere statt der äusseren Temperatur setzt, weil durch die Begrenzung des Beobachtungsraumes der Parallelismus der Schichten gestört wird. Ich glaube, dass durch

die folgende Entwickelung wenigstens eine erste Näherung an die wahre Erscheinung angebahnt ist.

Der Lichtstrahl trifft in einer gewissen Richtung, die abhängig ist von der Temperatur im Freien, an der Grenzfläche ein, in der die äussere Temperatur in die innere übergeht. An dieser Grenzfläche findet eine neue Brechung statt, deren Betrag zu rechnen ist. Hiezu ist die Kenntniss der Grenzfläche nothwendig; dieselbe wird sich mehr oder minder der Begrenzung des Beobachtungsraumes anschliessen, da man annehmen muss, dass durch die Ausstrahlung der Wände die innere Temperatur bedingt ist. Jedenfalls kann man zur Durchführung einer ersten Näherung eine andere Annahme gar nicht machen, da die im Saal vertheilten 5 Thermometer innerhalb sehr enger Grenzen übereinstimmten. Legt man also diese Hypothese zu Grunde, so ist zu unterscheiden, ob der Strahl auf die obere Begrenzungsebene oder auf eine Seitenebene fällt. Die obere kann als parallel der allgemeinen Schichtung angenommen werden und die Brechung wird sich hier also nach demselben Gesetz vollziehen, wie an den anderen Schichten. Sind z' und z_0 die Zenithdistanzen des äusseren und des gemessenen Strahles, μ' und μ_0 die Brechungsindices der äusseren und der inneren Luft, ϱ' und ϱ_0 deren Dichtigkeiten, so ist nach dem Snellius'schen Gesetz

$$\frac{\sin z'}{\sin z_0} = \frac{\mu_0}{\mu'} = \sqrt{\frac{1+2c\varrho_0}{1+2c\varrho'}}$$

oder

$$\frac{\sin z_0^2 - \sin z'^2}{\sin z_0^2} = 2\alpha'\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho'}\right),$$

wenn mit α' die Refractionsconstante $\frac{c\varrho'}{1+2c\varrho'}$ bezeichnet wird. Setzt man ferner

$$z_0 - z' = R_s$$

und

$$1 - \frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{m\,(t_0 - t')}{1 + m\,t_0}.\quad \begin{cases} m = \text{Ausdehnungscoefficient d. Luft,} \\ t_0 = \text{innere Temperatur,} \\ t' = \text{äussere Temperatur,} \end{cases}$$

so wird mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen von R_s

$$R_s = \left(\frac{m\,a'}{1 + m\,t_0}\,tg\,z_0\right)(t_0 - t')$$

Da die erste Klammer der Temperaturcoefficient ist, so ist ersichtlich, dass man die Brechung im Beobachtungsraum einfach dadurch berücksichtigen kann, dass man statt der Aussentemperatur die innere nimmt. Anders gestaltet sich der Ausdruck für eine Seitenwand; hier findet die Brechung senkrecht zur bisherigen Richtung statt und der Ansatz wird

$$\frac{\cos z'}{\cos z} = \frac{\mu_0}{\mu'},$$

aus dem sich ebenso wie oben der Ausdruck

$$R_s = -\left(\frac{a'\,m}{1 + m\,t_0}\,tg\,z_0\right) cotg\,z_0^2\,(t_0 - t')$$

ableitet. Die Brechung hat aber hier ihr Maximum oben und gegen den Horizont zu wird sie verschwindend. Ist

z die wahre Zenithdistanz, also jene Grösse, die in letzter Linie gesucht wird,

z' die scheinbare Z.D., mit der der Strahl an der Begrenzungsebene des Spaltes ankommt,

R die Refraction gerechnet mit der äusseren Temperatur,

z_0 die gemessene Zenithdistanz,

R_s die durch die eben abgeleiteten Formeln gegebene Refraction im Beobachtungsraum,

so hat man $$z = z' + R$$
$$z' = z_0 - R_s$$
und daher $$z = z_0 + R - R_s$$

$z_0 + R$ sind die wahren Zenithdistanzen, aus denen wir bis jetzt die Declinationen abgeleitet haben; von ihnen müssen also, um sie von dem Einfluss der Saalrefraction zu befreien, noch die R_s subtrahirt werden. Geschieht dies für unsere Beobachtungen, so erhält man neue $\delta - \delta'$ und damit neue Bedingungsgleichungen, deren Auflösung jetzt ergibt:

$$x = -1''018, \quad y = +0.553, \quad z = +0.033, \quad (6)$$

während, wenn nur die Sterne bei 76° Z.D. behandelt werden,

$$x = -0''912, \quad y = +0.445 \quad (7)$$

erfolgt.

Man erkennt, dass jetzt ein Widerspruch zwischen den Resultaten aus den kleineren und den grösseren Zenithdistanzen nicht mehr besteht. Ein zwingender Beweis dafür, dass unsere Behandlung der Saalrefraction die sachgemässe ist, ist zwar damit nicht erbracht, allein da eine andere Möglichkeit, den genannten Widerspruch zu beseitigen, nicht mehr ersichtlich ist und eine andere Behandlung der Saalrefraction mit den vorliegenden Mitteln nicht durchführbar ist, so denke ich, dass man sich mit dem erhaltenen Resultat beruhigen kann.

Zur endgiltigen Ermittelung der Refractionsconstante ist nun an die Beobachtungen noch die Correction anzubringen, die wir oben als nothwendig erkannten, nämlich wir haben statt mit der optischen mit der physikalischen Dichtigkeit der Luft zu reduciren. Geschieht dies, so ergiebt die Auflösung aller Gleichungen zusammen

$$x = -1''036, \quad y = +0.563 \quad (8)$$

und jener bis 76° Zenithdistanz

$$x = -0\overset{''}{.}952, \qquad y = +0.491 \tag{9}$$

Wir betrachten die Auflösung (8) als die definitive und ziehen aus ihr nunmehr die Resultate. Für 718 mm (bei 0° C) Quecksilberdruck, + 5° C Temperatur und 6 mm Dampfdruck wird die den Radau'schen Tafeln zu Grunde liegende Bessel'sche Refractionsconstante: 56".076; diese Zahl erheischt die Correction $-56''.076 \times 0.00563 = -0''.315$ und es wird daher aus ihr 55".761; das gibt für 760 mm Quecksilberdruck (bei 0° C Quecksilbertemperatur), 0° C Lufttemperatur und 6 mm Dampfdruck:

$$60''.104.$$

Den mittleren Fehler dieser Grösse habe ich zu ± 0".025 ermittelt. Ihr entspricht der Brechungsindex für denselben Luftzustand:

$$1.00029152 \pm 0.00000012$$

Die Correction der Polhöhe, die natürlich fast ausschliesslich von der Correction der Refractionsconstante abhängig ist, wird

$$\Delta\varphi = +0''.518 \pm 0''.056$$

und da wir als mittleren Werth der Polhöhe + 48° 8′ 45".05 der Rechnung zu Grunde legten, so wird der definitive Werth

$$+48^{\circ}\,8'\,45''.57.$$

Es ist versucht worden, die angestellten Refractionsbeobachtungen in sehr geringen Höhen noch nach einer anderen Richtung hin nutzbar zu machen. Man begegnet nämlich nicht selten der Meinung, dass man durch astronomische Refractionsbeobachtungen Aufschluss über die Temperaturvertheilung in den obersten Schichten der Atmo-

sphäre erhalten könne. Es ist dies nur sehr beschränkt der Fall. Denn der Einfluss des Gesetzes der Temperaturvertheilung auf die Refraction wird weit überwogen durch andere Factoren, deren genaueste Kenntniss vorausgehen müsste, ehe man sich mit einiger Sicherheit über jenes Gesetz aussprechen könnte; solche Factoren sind die Refractionsconstante selbst und ihre Abhängigkeit vom eingestellten Punkt des Sternspectrums, der Ausdehnungscoefficient der Luft, die Luftfeuchtigkeit und vor Allem die Temperatur der untersten Luftschichten. Aber auch, wenn es gelungen ist, die Einflüsse dieser Factoren zu trennen und zu bestimmen, bleibt der Spielraum, den die Refractionsbeobachtungen jenem Gesetz gestatten, noch ein weiter. Die vielen Rechnungen, die Herr Radau hierüber mitgetheilt hat, setzen dies ausser allen Zweifel; ich habe trotzdem anfangs geglaubt, durch recht zahlreiche und scharfe Beobachtungen in niederen Höhen, einigen Aufschluss zu erlangen; es ist dies aber nicht in Erfüllung gegangen. Man kann mit sehr verschiedenen Gesetzen die Beobachtungen noch darstellen, wenn man entsprechende Aenderungen an der Refractionsconstante vornimmt. Von den vielen Versuchen mit negativem Resultat ist in der Abhandlung jener ausführlicher dargestellt, der eine Entscheidung bringen sollte, ob die Ivory'sche oder die Gyldén'sche Ansicht über die Constitution der Atmosphäre den Wahrnehmungen besser entspreche. Es war aber nicht möglich, sich zu Gunsten einer derselben auszusprechen, obwohl die Verschiedenheit zwischen beiden nicht unbeträchtlich ist; stellt man beide Gesetze in derselben Form dar, so ist nach der Ivory'schen Hypothese $t_0 - t = 5\overset{\circ}{.}69\,h - 0\overset{\circ}{.}19\,h^2$ und nach der Gyldén'schen Hypothese $t_0 - t = 5\overset{\circ}{.}10\,h - 0\overset{\circ}{.}025\,h^2$, wo h die Höhe in Kilometern über dem Boden, t_0 und t die Temperaturen in den Höhen 0 und h bezeichnen. Betreff des Gesetzes der Temperaturabnahme wird man also immer auf meteorologische

Beobachtungen angewiesen sein und zwar hauptsächlich auf Beobachtungen im Luftballon. Die rege Thätigkeit der Luftschifffahrt-Vereine verspricht hier für die Zukunft gute Resultate; bis jetzt allerdings hat nur die ausserordentliche Veränderlichkeit des „Gesetzes" constatirt werden können, namentlich für die Schichten bis etwa 2 km Höhe. Einige Nachtfahrten der Herren Professoren Sohncke und Finsterwalder haben für Höhen zwischen 300 m und 2000 m eine adiabatische Temperaturabnahme, also eine solche von 10° für 1 km in heiteren Sommernächten constatirt. Diesen raschen Temperaturabnahmen stehen jedoch vielfach, für die Nachtzeiten fast immer Temperaturumkehrungen, d. h. Zunahmen, namentlich in den Bodenschichten bis zu 300 m, entgegen. Soweit sich aus den wenigen bis jetzt vorliegenden systematischen Bearbeitungen Schlüsse ziehen lassen, scheint jedoch im grossen Mittel die Ivory'sche Hypothese bis zu 10 km das Richtige zu treffen. Darüber hinaus deuten die neuesten Hochfahrten des deutschen Vereines für Luftschifffahrt, die namentlich mit dem Registrirballon in bedeutende Höhen geführt haben, starke Abweichungen vom Ivory'schen Gesetz an, wogegen das Gyldén'sche Gesetz in ziemlicher Uebereinstimmung bleibt. Trotzdem bleibt für die Berechnung der Refraction die Ivory'sche Hypothese völlig ausreichend, weil der Einfluss der obersten Luftschichten bis zu Zenithdistanzen von 88° ein nahezu verschwindender ist; für sie sind lediglich die unteren Schichten massgebend und in diesen genügt die Ivory'sche Formel.

Wie schon oben erwähnt, ist für heitere Nächte, also gerade für jene Zeiten, in denen die meisten astronomischen Beobachtungen angestellt werden, eine Temperaturumkehr d. h. ein Maximum der Temperatur in mässiger Höhe als fast regelmässig bestehend constatirt worden. Sowohl zahlreiche nächtliche Ballonfahrten, als auch namentlich die Beobachtungen am Eiffelthurm in Paris haben dieses Maxi-

mum auf rund 2° C in 200 m Höhe festgelegt. Es ist für die Bestimmung der Refractionsconstante von grösster Wichtigkeit, den Einfluss eines solchen Maximums auf die Refraction kennen zu lernen. Durch eine Art mechanischer Quadratur habe ich die Differenzen berechnet, um welche das Vorhandensein der Temperaturumkehr die Refractionen gegenüber den normal gerechneten vergrössert, und gefunden:

z	Δ
74° 2′	+ 0″06
79 4	+ 0.23
82 16	+ 0.63
84 7	+ 1.32
86 22	+ 5.08
87 56	+ 16.36

Diese Tabelle lehrt: 1) dass bis etwa 80° Z.D. der Einfluss der gewöhnlich beobachteten Temperaturinversionen auf die Refraction ein verschwindender ist, sodass man in der astronomischen Praxis, wo man schon aus anderen Gründen 80° Z.D. nur im Nothfalle überschreiten wird, darauf keine Rücksicht zu nehmen braucht; 2) dass unsere früher aufgestellten Differenzen $\delta - \delta'$, aus denen wir die Correction der Refractionsconstante abgeleitet haben, noch grösser würden, also eine noch stärkere Verkleinerung der Bessel'schen Refractionsconstante erheischen würden, wenn man die regelmässige Einwirkung einer Temperaturinversion auf die Beobachtungen annimmt.

Diese letztere Thatsache setzt uns meines Erachtens über das letzte Bedenken hinweg, das gegen eine Verkleinerung der Bessel'schen Refractionsconstante noch vorgebracht werden könnte. Es erscheint mir jetzt erwiesen, dass keine mit den meteorologischen Beobachtungen im Einklang stehende Constitution der Atmosphäre angenommen werden kann, welche die Differenzen $\delta - \delta'$ zu erklären im

Stande wäre. Dann aber bleibt nichts übrig als die Bessel-sche Refractionsconstante um den oben gefundenen Betrag zu verringern. Man wird sich um so leichter dazu entschliessen, die solange gebrauchte Constante zu verlassen, als eine ganze Reihe ausgezeichneter Beobachtungen an anderen Sternwarten zu einem ähnlichen Resultate führte. Ich stelle in der folgenden Tabelle die wichtigsten Bestimmungen zusammen. Hiebei ist die Refractionsconstante definirt durch

$$a = \frac{c\varrho}{1+2c\varrho},$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Luft und c eine Constante ist, die mit dem Brechungsindex μ der Luft in der Beziehung

$$\mu^2 = 1 + 2c\varrho$$

steht; ferner sind alle Zahlen reducirt auf einen Luftzustand, der einem Quecksilberdruck von 760 mm bei 0° C Quecksilbertemperatur und der Schwere unter 45° Breite und Seehöhe, einer Lufttemperatur von 0° C und einer mittleren Luftfeuchtigkeit von 6 mm Dampfdruck entspricht.

	a	a''	μ
1. Bessel, Fund. Astr.	0.000 29244	60″320	1.000 29257
2. Bessel, Tab. Reg.	29302	440	29315
3. Tab. Pulkov.	29219	268	29232
4. Fuss.	29148	122	29161
5. Greenwich 1857—1865	29147	120	29160
6. Pulk. 1865	29190	209	29203
7. Greenwich 1877—1886	29182	192	29195
8. Pulkowa 1885	29117	058	29130
9. München	29139	104	29152

Grosses Interesse bietet die Vergleichung des auf astronomischem Wege gefundenen Brechungsexponenten der Luft mit

dem durch physikalische Methoden ermittelten. Die neueste und wohl zuverlässigste Bestimmung, die auch betreff ihrer Resultate ziemlich in der Mitte liegt zwischen den früheren besten Bestimmungen von Ketteler, Lorenz und Mascart, ist die schon oben citirte von den Herren Kayser und Runge. Diese finden durch eine photographische Methode für μ den Ausdruck

$$10^7(\mu - 1) = 2878.7 + 13.16\lambda^{-2} + 0.316\lambda^{-4},$$

wenn λ die Wellenlänge in Tausendsteln des mm bedeutet. Das Mittel aus den obigen astronomischen Beobachtungen mit Ausschluss der beiden Bessel'schen Werthe gibt:

$$a = 0.00029163, \quad a'' = 60''.153, \quad \mu = 1.00029176$$

Dieser astronomische Werth würde hiernach der Wellenlänge $\lambda = 0.601$ entsprechen. Umgekehrt findet man aus der Formel für die Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien folgende Werthe von μ:

	λ	μ
A	0.760	1.0002902
B	0.687	2908
C	0.656	2911
D	0.589	2919
E	0.526	2930
F	0.486	2940
Maximalintensität	0.575	2921

Hieraus würde folgen, dass bei astronomischen Beobachtungen nicht auf die Stelle der Maximalintensität des Spectrums eingestellt wird, sondern auf eine mehr gegen roth zu gelegene Stelle, nämlich etwa auf die Mitte zwischen den Linien *C* und *D*, die an der Grenze von Gelb und Roth liegt. Ob die Ursache hievon in der selectiven Extinction des Lichtes in der Atmosphäre zu suchen ist, wonach besonders bei starkem Wasserdampfgehalt der Luft die

blauen Theile des Spectrums stärker absorbirt werden als die rothen, muss bei dem Mangel an exacten Messungen hierüber dahingestellt bleiben. Die hiesigen Wahrnehmungen würden dafür sprechen, denn das Spectrum der Sterne zeigte fast ausnahmslos nur Gelb und Roth.

Mit der gefundenen Refractionsconstante und der davon abhängigen Polhöhe ist das Declinationssystem der gemessenen Sterne aufgestellt worden. Die Eigenthümlichkeiten der Reduction desselben, nämlich die Anwendung der auf einer neuen Analyse beruhenden Radau'schen Tafeln, die Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit und der Temperatur des Beobachtungsraumes und insbesondere der Gebrauch einer neuen, sowohl gegen die Bessel'sche als gegen die Gyldén-sche stark verminderten Refractionsconstante lassen von vorneherein starke systematische Unterschiede desselben gegen die bereits bekannten erwarten. Dieselben verschwinden, wie leicht zu zeigen war, vollständig, wenn mit den alten Mitteln reducirt wird; eine Ausnahme hievon besteht nur für die auf der südlichen Halbkugel der Erde beobachteten Sternkataloge; die Differenzen mit diesen sind systematisch, gleichviel ob mit der Bessel'schen oder einer verringerten Refractionsconstante reducirt wird; falls sich dieses Resultat bestätigt, wird man auch aus der Vergleichung von Beobachtungen, die auf der nördlichen und südlichen Halbkugel angestellt wurden, kein Kriterium für die Wahl der richtigen Refractionsconstante ziehen können.

Von den durchgeführten Vergleichungen der beiden Münchener Systeme M und M', von denen das erstere auf den Radau'schen Tafeln, das letztere auf der neuen Refractionsconstante beruht, soll hier nur jene mit dem Auwers-schen Fundamentalkatalog (*F. C.*) auszugsweise angeführt werden, weil sie auch die charakteristischen Merkmale der anderen wiedergibt.

Grenzen der Decl.	Mittl. Decl.	$M - F.C.$	$M' - F.C.$	Anz. d. Sterne
+88° 43′ ... +81° 48′	+85° 0′	−0″.19	−0″.11	5
+78 7 ... +70 59	+74 38	+0.31	+0.56	7
+69 59 ... +62 37	+66 40	+0.22	+0.40	7
+62 7 ... +58 51	+60 31	−0.20	+0.15	7
+58 33 ... +55 26	+57 4	+0.07	+0.54	9
+54 17 ... +50 8	+52 10	−0.09	+0.47	10
+49 58 ... +48 22	+49 10	−0.02	+0.49	10
+48 4 ... +45 5	+46 37	+0.17	+0.69	10
+44 56 ... +41 34	+43 18	+0.19	+0.73	15
+27 4 ... +10 16	+14 42	−0.34	+0.58	9
+ 9 22 .. + 2 41	+ 5 42	−0.23	+0.85	11
− 0 3 ... −15 34	− 8 9	−0.15	+1.15	10
−24 53 ... −30 25	−28 21	−0.11	+1.64	6

Wie man sieht, würden die Differenzen *M — F.C.* das jetzt als gesichert betrachtete Verhalten des *F.C.*, wonach seine südlichen Positionen vom Aequator ab, um $0''.50 - 0''.02\,\delta^0$ zu südlich wären, nicht bestätigen, wogegen die Differenzen *M′ — F.C.* eine Verschiebung des Systems nach Norden in noch erhöhtem Maasse verlangen würden. Es ist hieraus deutlich ersichtlich, in wie hohem Grade ein Declinationssystem von der Refractionsconstante abhängig ist und dass es einen geringen Fortschritt bedeutet, einen Wechsel des Declinationssystems eintreten zu lassen, wenn er nicht auf Grund gesicherter Annahmen über die Refractionsverhältnisse geschehen kann.

München, April 1894.

Beiträge zur Potentialtheorie.

Von **Walther Dyck.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

I.

Ueber die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Functionensystems durch bestimmte Integrale.

Ein genaues Studium der Kronecker'schen Arbeiten über „Systeme von Functionen mehrer Variabeln" und die Beschäftigung mit den mannigfachen, schon von Kronecker hervorgehobenen Beziehungen derselben zu den hierhergehörigen fundamentalen Untersuchungen von Cauchy und Gauss, von Sturm und von Jacobi, sowie zu neueren Arbeiten zur Analysis situs und zur Gleichungstheorie hat mich zu einer näheren Auseinandersetzung jener gegenseitigen Beziehungen, zur Ausdehnung gewisser Formulirungen, sowie zur Verallgemeinerung einzelner Fragestellungen geführt, deren Resultate ich in einer Reihe kürzerer Berichte der hohen mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie vorzulegen mir erlauben möchte.

In dem gegenwärtigen Aufsatze handelt es sich um die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Systems von $n+1$ reellen Functionen von n reellen Veränderlichen mit Hilfe von bestimmten Integralen; die von Kronecker gegebene Integralformel ist als specieller Fall, die beiden Kronecker'schen Summenformeln zur Bestimmung der Charakteristik sind als Grenzfälle in jener Darstellung enthalten.

§ 1.

Darstellung der Charakteristik eines Functionen-Systems durch ein n-faches Integral.

Den Betrachtungen liegt zu Grunde das System von $(n+1)$ eindeutigen, reellen Functionen:

$$F_0, F_1, F_2, \ldots F_n \tag{1}$$

der n reellen unbeschränkt veränderlichen Grössen $z_1, z_2 \ldots z_n$; dabei setzen wir voraus, dass diese Functionen eine n-fach unendliche Anzahl sowohl positiver als negativer Werthe annehmen, dass sie im Allgemeinen stetig und nach den einzelnen Variabeln differentiirbar sind, dass keine der $n+1$ aus je n Functionen gebildeten Functionaldeterminanten zusammen mit den betreffenden Functionen für unendlich viele Werthsysteme der z verschwindet.

Wir führen jetzt $n+1$ neue, reelle, unbeschränkt veränderliche Grössen $x_0, x_1, \ldots x_n$, die wir, um uns zur Abkürzung geometrischer Sprechweise bedienen zu können, als „rechtwinklige Punkt-Coordinaten eines linearen $n+1$ dimensionalen Raumes L_{n+1}" bezeichnen und deuten wollen, und setzen:

$$\begin{aligned} x_0 &= F_0(z_1, z_2, \ldots z_n). \\ x_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= F_n(z_1, z_2, \ldots z_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Es definiren dann diese Gleichungen in unserem L_{n+1} eine n-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit M_n, deren Punkte durch die Gesammtheit aller reellen Werthsysteme der Parameter z_i ebenso, wie durch die zugehörigen Punktcoordinaten x_k bezeichnet sind.

Unter Zugrundelegung dieser Mannigfaltigkeit M_n im Raume der x_k definire ich:

I. Die Charakteristik K des Systems der Functionen $F_0, F_1, \dots F_n$ ist diejenige Zahl, welche angibt, wie oft die Mannigfaltigkeit M_n den Coordinatenanfangspunkt $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$ umgibt.

In § 2 wird bewiesen, dass die so definirte Zahl K identisch ist mit der Kronecker'schen Charakteristik.

Aus der Definition folgt sofort eine Darstellung der Zahl K mit Hülfe eines n-fachen Integrales, dessen Element eine directe Verallgemeinerung für das Element des „räumlichen Winkels" in der bekannten Gauss'schen Formel ist.[1])

Bildet man nämlich die M_n durch Centralprojection vom Coordinatenanfangspunkt aus auf die „n-dimensionale Kugeloberfläche" vom Radius 1

$$3) \qquad x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

ab, so ist K die Anzahl der so erhaltenen Kugelbedeckungen.

Die Rechnung gestaltet sich folgendermassen:

Wir legen ein „parallelepipedisches" Element $d\Omega_n$ der Mannigfaltigkeit M_n durch einen Punkt

$$x_0, x_1, \dots x_n$$

und n Nachbarpunkte

$$x_0 + \overset{(i)}{dx_0}, \; x_1 + \overset{(i)}{dx_1}, \dots \; x_n + \overset{(i)}{dx_n}$$

Nach den Formeln der n-dimensionalen Analytik hat man dann für den Inhalt dieses Elementes die Formel

---

[1]) Gauss, Werke Bd. V, „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte" und „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus". Man vergl. auch die von Schering veranlasste Dissertation von O. Boeddicker, „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen", auf die noch später Bezug zu nehmen sein wird.



$$4) \qquad d\,\Omega_n = \sqrt{\left\| \begin{matrix} \overset{(1)}{dx_0} & \overset{(1)}{dx_1} & \overset{(1)}{dx_2} & \dots & \overset{(1)}{dx_n} \\ \overset{(2)}{dx_0} & \overset{(2)}{dx_1} & \overset{(2)}{dx_2} & \dots & \overset{(2)}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{dx_0} & \overset{(n)}{dx_1} & \overset{(n)}{dx_2} & \dots & \overset{(n)}{dx_n} \end{matrix} \right\|^2}$$

Hiebei ist in bekannter symbolischer Schreibweise unter dem Quadrate der Matrix die Summe der Quadrate ihrer Determinanten verstanden. Diese Determinanten selbst haben die Bedeutung des Inhaltes der Projectionen von $d\,\Omega_n$ auf die durch je n der Coordinaten x_i bezeichneten Coordinatenmannigfaltigkeiten. Das Verhältniss einer solchen Projection zum Elemente $d\,\Omega_n$ kann daher als Cosinus des Neigungswinkels der auf beiden errichteten Normalen bezeichnet werden. Es ergibt sich so z. B. für den Winkel der Normalen N gegen die Axe X_0:

$$5) \qquad \cos(NX_0) = \frac{\begin{vmatrix} \overset{(1)}{dx_1} & \overset{(1)}{dx_2} & \dots & \overset{(1)}{dx_n} \\ \overset{(2)}{dx_1} & \overset{(2)}{dx_2} & \dots & \overset{(2)}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{dx_1} & \overset{(n)}{dx_2} & \dots & \overset{(n)}{dx_n} \end{vmatrix}}{\sqrt{\left\| \begin{matrix} \overset{(1)}{dx_0} & \overset{(1)}{dx_1} & \overset{(1)}{dx_2} & \dots & \overset{(1)}{dx_n} \\ \overset{(2)}{dx_0} & \overset{(2)}{dx_1} & \overset{(2)}{dx_2} & \dots & \overset{(2)}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{dx_0} & \overset{(n)}{dx_1} & \overset{(n)}{dx_2} & \dots & \overset{(n)}{dx_n} \end{matrix} \right\|^2}}$$

Man hat weiter für den Cosinus des Winkels des Radiusvector R gegen die Axe X_0:

$$6) \qquad \cos(RX_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2}} = \frac{x_0}{r}$$

und bildet hieraus sofort für $\cos(RN)$ die Formel

$$7) \qquad \cos(RN) = \sum_{i=0}^{i=n} \cos(RX_i)\cdot\cos(NX_i)$$

Bezeichnet jetzt $d\omega_n$ die Centralprojection von $d\Omega_n$ auf die Einheitskugel, so ist

$$8) \qquad d\omega_n = d\Omega_n\cdot\cos(RN)\cdot\frac{1}{r^n},$$

wo der letzte Factor die Reduction des Elementes auf die Einheitskugel bewirkt.

Man erhält sonach unter Benützung der vorigen Beziehungen für $d\omega_n$ die Formel:

$$9) \qquad d\omega_n = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \overset{(1)}{dx_0} & \overset{(1)}{dx_1} & \overset{(1)}{dx_2} & \dots & \overset{(1)}{dx_n} \\ \overset{(2)}{dx_0} & \overset{(2)}{dx_1} & \overset{(2)}{dx_2} & \dots & \overset{(2)}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{dx_0} & \overset{(n)}{dx_1} & \overset{(n)}{dx_2} & \dots & \overset{(n)}{dx_n} \end{vmatrix}}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}^{\,n+1}}$$

Zur Umsetzung dieser Formel in die Parameter z wähle man die n Nachbarpunkte $x_\sigma + \overset{(i)}{dx_\sigma}$ so, dass

$$10) \qquad \overset{(i)}{dx_\sigma} = F_{\sigma i}\, dz_i,$$

(wobei durch den zweiten Index bei F_σ die partielle Ableitung nach dem Parameter z_i bezeichnet ist), man schreite also auf den „Parameterlinien" der Mannigfaltigkeit M_n vorwärts.

Es ergibt sich dann für das auf M_n definirte Element $d\Omega_n$ die Formel:

$$11)\qquad d\Omega_n = \sqrt{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{11} & F_{21} & \dots & F_{n1} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} & \dots & F_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{0n} & F_{1n} & F_{2n} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}^2} dz_1\, dz_2 \dots dz_n$$

und ebenso lassen sich sofort die Formeln für $\cos(RN)$ und r in den z_i schreiben.

Bezeichnet man noch durch $\tilde{\omega}_n$ die Oberfläche der Kugel vom Radius 1

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

so ergibt sich:

II. Die Charakteristik K des Systems der Functionen $F_0, F_1, \dots F_n$, dargestellt als Windungszahl der Mannigfaltigkeit M_n um den Nullpunkt, ist gegeben durch das n-fache Integral

$$12)\qquad K = \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \cdot \int d\omega_n =$$

$$= \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2}^{\,n+1}} dz_1\, dz_2 \dots dz_n.$$

Das Integral ist dabei erstreckt über das gesammte Werthesystem der reellen Veränderlichen $z_1, z_2, \dots z_n$, denn dieses Werthesystem ist im Allgemeinen den Punkten $x_0, x_1, \dots x_n$ unserer Mannigfaltigkeit M_n umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Die Formel macht unmittelbar die Gleichberechtigung der Functionen $F_0, F_1, \dots F_n$ ersichtlich.

Das Vorzeichen der Charakteristik K ist an eine bestimmte Reihenfolge der Functionen geknüpft und wechselt bei Vertauschung von je zweien derselben.

§ 2.

Die Kronecker'sche Summenformel.

Man entnimmt der vorstehenden Formel (12) sofort:

Die Elemente des Integrals werden nach dem Vorzeichen der Zählerdeterminante summirt. Dieses Vorzeichen aber unterscheidet die beiden Seiten der Mannigfaltigkeit M_n gesehen vom Coordinatenanfangspunkte aus, insoferne die gleich Null gesetzte Determinante die Bedingung für den „berührenden Kegel" vom Coordinatenanfangspunkt nach der M_n darstellt.[1])

Ein beliebiger, vom Coordinatenanfangspunkt auslaufender Strahl durchsetzt die Mannigfaltigkeit M_n in einer Anzahl von Punkten, die wir nach dem Vorzeichen der Determinante unterscheiden.

Zählt man nun diese Schnittpunkte dem Vorzeichen entsprechend je mit $+1$ bez. -1 gerechnet ab, so erhält man eine Zahl, die unabhängig ist von der speciellen Richtung des gewählten Strahles und also giltig für die Gesammtheit aller Strahlen, welche die Elemente der M_n auf die Einheitskugel projiciren.

Die Zahl gibt somit eben die Anzahl der Bedeckungen der Einheitskugel an und ist demnach identisch mit der in I. definirten Charakteristik K.

Bildet man aber andererseits speciell für einen der Axenstrahlen, z. B. für die positive Axe X_n

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0, \ldots\ x_{n-1} = 0,\ x_n > 0$$

---

[1]) Das im Allgemeinen stets vorhandene Auftreten von Selbstdurchsetzungen unserer M_n (längs Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen) hindert die Bestimmung der „Flächenseite" durch jenes Vorzeichen nicht.

die algebraische Summe über die Schnittpunkte mit M_n, so folgt:

$$13)\qquad K = \sum \text{sign.} \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{n-11} & F_{n-12} & \dots & F_{n-1n} \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \sum \text{sign.} (\Delta_n)$$

wo Δ_n die Functionaldeterminante der $F_0, F_1, \dots F_{n-1}$ bezeichnet und die Summe sich erstreckt über die Punkte

$$F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots\ F_{n-1} = 0,\ F_n > 0.$$

Die so gewonnene Formel ist abgesehen vom Vorzeichen identisch mit der von Kronecker für die Charakteristik des Functionensystems gegebenen.

Addirt man die beiden für die positive und für die negative Halbaxe X_n aufgestellten Summenformeln, so folgt

$$14)\qquad 2K = (-1)^n \sum \text{sign.} (F_n \cdot \Delta_n)$$

die Summe erstreckt über alle Punkte

$$F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots\ F_{n-1} = 0,$$

die zweite Kronecker'sche Summenformel.

§ 3.

Weitere Darstellungen der Charakteristik durch vielfache Integrale.

Neben den ersten Integralausdruck für die Charakteristik unseres Functionensystems stellen sich eine Reihe weiterer mit Hilfe des aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen direct folgenden Satzes:

III. Jeder „lineare Schnitt"

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0, \ldots\ x_k = 0$$

der Mannigfaltigkeit M_n, der also eine Mannigfaltigkeit M_{n-k-1} von $n-k-1$ Dimensionen im linearen Raume L_{n-k} der $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n$ definirt, ist ebenso oft wie M_n selbst um den Nullpunkt gewunden.

Es ergibt sich aus diesem Satze die Darstellung von K durch ein $(n-1)$-faches, $(n-2)$-faches, ... $(n-k-1)$-faches, ... 2-faches, 1-faches Integral und schliesslich fliesst aus ihr als Grenzfall die Darstellung mit Hilfe einer Summenformel. Die letztere ist die von Kronecker für die Charakteristik aufgestellte Summenformel, und ebenso ist das $(n-1)$-fache Integral eben das von Kronecker hergeleitete.[1])

Für die Herstellung des durch den Satz III bezeichneten Integralausdruckes für die Charakteristik sind wesentlich dieselben Ueberlegungen massgebend wie bei den in § 1 gegebenen Formulirungen. In der durch

---

[1]) Kronecker benützt zur Ableitung dieses $(n-1)$-fachen Integrales unter Auszeichnung der Function F_0 die Abbildung des „Raumes der $z_1, z_2, \ldots z_n$" auf den Raum der $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch

$$x_1 = F_1,\ x_2 = F_2, \ldots\ x_n = F_n\,;$$

die reellen Punkte z_i des Raumes der z sind dabei eindeutig auf reelle Punkte x_i abgebildet, aber umgekehrt entsprechen den Punkten x_i im Allgemeinen verschiedene Punkte z_i. Die Function $F_0(z_1, z_2, \ldots z_n)$ geht bei der Abbildung über in $\Phi_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$, und dabei ist die Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ ihrerseits umkehrbar eindeutig auf $\Phi_0 = 0$ bezogen. Die Anzahl der Windungen von $\Phi_0 = 0$ (also in der obigen Bezeichnung des Schnittes der M_n mit $x_0 = 0$) um den Nullpunkt ist dann die gesuchte Charakteristik.

Dadurch, dass in der oben gewählten Form der Definition und Herleitung der Charakteristik jede Auszeichnung einer der Functionen des Systems vermieden ist, werden die Formulirungen allgemeiner und übersichtlicher. Der Satz von der Unveränderlichkeit der Charakteristik bei Vertauschung der Functionen des Systems ist direct gegeben.

$$
15) \quad
\begin{aligned}
x_0 &= F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
x_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= F_k(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0; \\
x_{k+1} &= F_{k+1}(z_1, z_2 \ldots z_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= F_n(z_1, z_2, \ldots z_n)
\end{aligned}
$$

gegebenen M_{n-k-1} bestimmen wir ein $(n-k-1)$-dimensionales Element $d\Omega_{n-k-1}$ durch einen Punkt $x_{k+1} \ldots x_n$ und $n-k-1$ Nachbarpunkte

$$x_{k+1} + \overset{(i)}{d}x_{k+1}, \; x_{k+2} + \overset{(i)}{d}x_{k+2}, \ldots \; x_n + \overset{(i)}{d}x_n$$

Der Inhalt des Elementes $d\Omega_{n-k-1}$ ist somit analog wie oben gegeben durch:

$$
16) \quad d\Omega_{n-k-1} = \sqrt{\begin{Vmatrix}
\overset{(1)}{d}x_{k+1} & \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(1)}{d}x_n \\
\overset{(2)}{d}x_{k+1} & \overset{(2)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(2)}{d}x_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\overset{(n-k-1)}{d}x_{k+1} & \overset{(n-k-2)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(n-k-1)}{d}x_n
\end{Vmatrix}^2}
$$

und für die Centralprojection dieses Elementes auf die Einheitskugel

$$x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

ergibt sich

$$
17) \quad d\omega_{n-k-1} = \frac{\begin{vmatrix}
x_{k+1} & x_{k+2} & \ldots & x_n \\
\overset{(1)}{d}x_{k+1} & \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(1)}{d}x_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\overset{(n-k-1)}{d}x_{k+1} & \overset{(n-k\;\;1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(n-k\;\;1)}{d}x_n
\end{vmatrix}}{\sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots x_n^2}^{\,n-k}}
$$

Führen wir jetzt in der Mannigfaltigkeit M_{n-k-1} die Parameter $z_1, z_2, \ldots z_{n-k-1}$ als unabhängige, die übrigen als durch die Gleichungen $F_0 = 0$, $F_1 = 0, \ldots F_k = 0$ von ihnen abhängige Parameter ein, so kann man setzen:

$$18)\qquad 0 = \left[F_{\sigma i} + \sum_{\mu=n-k}^{\mu=n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i}\right] dz_i$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots k; \quad i = 1, 2, \ldots n-k-1$$

$$19)\qquad \overset{(i)}{d}x_\sigma = \left[F_{\sigma i} + \sum_{\mu=n-k}^{\mu=n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i}\right] dz_i$$

$$\sigma = k+1, \ldots n; \quad i = 1, 2, \ldots n-k-1$$

Aus den Gleichungen (16) folgt

$$20)\qquad \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i} = \frac{\overset{(i)}{D}_\mu}{D},$$

wo D die aus den letzten $k+1$ Verticalreihen der Matrix

$$21)\qquad M = \left\| \begin{matrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-k-1} & F_{0\,n-k} & \ldots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-k-1} & F_{1\,n-k} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{k\,n-k-1} & F_{k\,n-k} & \ldots & F_{kn} \end{matrix} \right\|$$

gebildete Determinante ist, und $\overset{(i)}{D}_\mu$ diejenige, welche aus D durch Ersetzen der Verticalreihe mit dem Index μ $(\mu = n-k, \ldots n)$ durch die Verticalreihe mit dem Index i $(i = 1, 2, \ldots n-k-1)$ entsteht.

Es kann nunmehr jede Determinante der Matrix der dx (Formel 16) dargestellt werden als symbolisches Product zweier Matrices.

So ist:

$$
22)\qquad (D)^{n-k-1}\cdot\begin{vmatrix}
\overset{(1)}{d x_{k+2}} & \overset{(1)}{d x_{k+3}} & \dots & \overset{(1)}{d x_n} \\
\overset{(2)}{d x_{k+2}} & \overset{(2)}{d x_{k+3}} & \dots & \overset{(2)}{d x_n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\overset{(n-k-1)}{d x_{k+2}} & \overset{(n-k-1)}{d x_{k+3}} & \dots & \overset{(n-k-1)}{d x_n}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
F_{k+2\,1} & F_{k+2\,2} & \dots & F_{k+2\,n} \\
F_{k+3\,1} & F_{k+3\,2} & \dots & F_{k+3\,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
D & 0 & \dots & 0 & \overset{(1)}{D}_{n-k} & \overset{(1)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(1)}{D}_n \\
0 & D & \dots & 0 & \overset{(2)}{D}_{n-k} & \overset{(2)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(2)}{D}_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & D & \overset{(n-k-1)}{D}_{n-k} & \overset{(n-k-1)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(n-k-1)}{D}_n
\end{vmatrix} \cdot d z_1\, d z_2 \dots d z_{n-k-1}.
$$

Die zweite dieser Matrices ist correspondirende Matrix zu der in Formel (21) gegebenen. Der Factor, um welchen sich je die entsprechenden Determinanten unterscheiden ist, D^{n-k-2}. Das Matrixproduct kann demnach in der Form geschrieben werden:

$$23)\qquad D^{n-k-2}\cdot\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+2\,1} & F_{k+2\,2} & \dots & F_{k+2\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

Für das Oberflächenelement 17) auf der Einheitskugel ergibt sich hieraus durch eine einfache Zusammenziehung die Formel

$$24)\qquad d\omega_{n-k-1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{D\cdot\sqrt{F_{k+1}^2+\dots F_n^2}^{\,n-k}}\cdot dz_1\, dz_2 \dots dz_{n-k-1}$$

Führt man nun an Stelle von $z_1, z_2, \dots z_{n-k-1}$ andere Parameter z, also $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_{n-k-1}}$ ein, so erhält man für $d\omega_{n-k-1}$ eine analoge in den Differentialen

$$dz_{i_1}\, dz_{i_2} \dots dz_{i_{n-k-1}}$$

geschriebene Formel, in welcher die obige Determinante D der Matrix (21) ersetzt ist durch die Determinante D_i, welche durch Streichen der Verticalreihen mit den Indices $i_1, i_2, \dots i_{n-k-1}$ entsteht.

Jetzt fasse man die Ausdrücke

$$25)\qquad d o_{n-k-1} = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2}}{D_i} \, dz_{i_1}\, dz_{i_2} \dots dz_{i_{n-k-1}}$$

als Elemente für die Integration in den z auf,[1]) so kann man den Integralausdruck für die Charakteristik in folgender allgemeiner Formel zusammenziehen:

$$26)\qquad K = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n-k-1}} \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 + \dots + F_n^2}^{\,n-k} \sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2}} \, d o_{n-k-1}$$

---

[1]) Deuten wir diese Formel, wovon später noch zu handeln sein wird, im linearen Raume rechtwinkliger Coordinaten $z_1, z_2, \dots z_n$, so stellt $d\,o_{n-k-1}$ ein „Oberflächenelement" der Mannigfaltigkeit $F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots F_k = 0$ dieses Raumes dar, dessen Projection auf die Coordinatenmannigfaltigkeit der $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_{n-k-1}}$ durch $dz_{i_1}, dz_{i_2}, \dots dz_{i_{n-k-1}}$ gegeben ist, während $\frac{D_i}{\sqrt{M^2}}$ als „Cosinus des Neigungswinkels jener Elemente gegen einander" zu bezeichnen ist.

Hiebei bezeichnet $\tilde{\omega}_{n-k-1}$ die Oberfläche der Kugel

$$x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Die Integration ist zu erstrecken über die Gesammtheit aller reellen Werthesysteme der z, für welche

$$F_0 = 0, \ F_1 = 0, \dots F_k = 0$$

ist. Löst man die Zählerdeterminante dieses Ausdruckes nach den Determinanten D_i der Matrix M (Gl. 19) auf und führt für jedes einzelne der so entstehenden Theilintegrale die nach Formel (23) entsprechenden $dz_{i_1} \dots dz_{i_{n-k-1}}$ als unabhängige Differentiale ein, so erkennt man:

IV. Die Charakteristik K lässt sich darstellen durch eine Summe von $\binom{n}{n-k-1}$ $(n-k-1)$-fachen Integralen, deren **Grenzen** ausschliesslich von einem ersten Theil unserer Functionen, den gleich Null gesetzten Functionen:

$$F_0, \ F_1, \dots F_k$$

abhängen, während die **unter dem Integralzeichen** stehenden Differentiale nur von den übrigen Functionen

$$F_{k+1}, \ F_{k+2}, \dots F_n$$

abhängen. Die Abnahme der Ordnung der einzelnen Integrale vom n-fachen bis zum 0-fachen findet dabei in der Zunahme der Anzahl der Bedingungsgleichungen für die Grenzen von 0 bis n gewissermassen ihren Ausgleich.

Für $k = 0$ ergibt sich das von Kronecker gegebene $(n-1)$-fache Integral. Für $k = n-1$ folgt die in § 2 (Gl. 19) abgeleitete Summenformel.

Zunächst folgt nämlich:

$$K = (-1)^n \cdot \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \sum \frac{F_n \cdot \Delta_n}{\text{abs}\,(F_n) \cdot \text{abs}\,(\Delta_n)} \cdot \varepsilon,$$

wenn wir mit ε den Grenzwerth für die Grösse der diskreten Punkte, über welche die Summation erfolgt, bezeichnen. Als Inhalt der aus zwei Punkten bestehenden quadratischen Mannigfaltigkeit

$$x_n^2 = 1$$

folgt dann

$$\tilde{\omega}_0 = 2\varepsilon$$

und damit ergibt sich direct die Kronecker'sche Formel

$$K = (-1)^n \frac{1}{2} \sum \operatorname{sign}(F_n A_n).$$

§ 4.

Verallgemeinerungen.

Die Darlegungen des § 2, welchen zufolge die Zahl K sich durch die dem Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

entsprechend erfolgende Summation der Schnittpunkte der M_n mit einem beliebigen Axenstrahl bestimmt, gestatten die folgende für manche Fragen nicht unwesentliche Verallgemeinerung unserer Integraldarstellungen.

V. Es ist keineswegs nothwendig, die in den vorstehenden Formeln gegebenen Integrale über das ganze Gebiet einer Mannigfaltigkeit M_{n-k-1} zu erstrecken, man kann sich vielmehr auch beschränken auf diejenigen Theile derselben, welche durch einen vom Coordinatenanfangspunkt auslaufenden, sonst ganz beliebigen Kegel begrenzt sind, wenn man nur den Divisor $\tilde{\omega}_{n-k-1}$ ersetzt durch den Inhalt des

von diesem Kegel auf der Einheitskugel ausgeschnittenen Gebietes.

So kann man z. B. das durch

$$x_0 = F_0 = 0, \ x_1 = F_1 = 0, \ \dots \ x_k = F_k = 0$$

bezeichnete Integrationsgebiet einschränken durch eine beliebige Anzahl weiter zutretender Ungleichungen

$$x_{k+1} = F_{k+1} > 0, \quad x_{k+2} = F_{k+2} > 0, \ \dots \quad x_l = F_l > 0;$$

$\tilde{\omega}_{n-k-1}$ ist dabei zu ersetzen durch $\frac{\tilde{\omega}_{n-k-1}}{2^m}$, wenn m die Anzahl der Ungleichungen ist.

Auf anderweite mögliche Verallgemeinerungen unserer Formeln, wie sie etwa durch Deformationen der Mannigfaltigkeit M_n herbeigeführt werden können und wie sie bei allen derartigen Betrachtungen der Analysis situs Platz greifen, gehe ich hier nicht ein.

Sitzung vom 15. Juni 1895.

1. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „Ueber den Nadelschuttepilz der Lärche, Sphaerella laricina n. sp.“

2. Herr Alfred Pringsheim bringt einen Nachtrag zu dem in der Januarsitzung eingereichten Aufsatze: „Zum Cauchy'schen Integralsatz.“

3. Herr Ferdinand Lindemann macht eine Mittheilung: „Ueber die conforme Abbildung eines Flächenstückes, das durch Parabeln mit gemeinsamer Axe begrenzt wird.“

Derselbe legt ferner ein aus Vorder-Asien stammendes antikes Modell (Bronze-Guss) eines Archimedischen Körpers (Rhomben-Triakontaëder) vor.

Die Berichte über die beiden Mittheilungen erfolgen im nächsten Hefte.

4. Herr Adolf v. Baeyer berichtet über seine weiteren Untersuchungen: „Ueber das Kümmelöl.“ Die Resultate werden an einem anderen Orte veröffentlicht.

Der Nadelschüttepilz der Lärche, Sphaerella laricina n. sp.

Von **Robert Hartig.**

(*Eingelaufen 15. Juni.*)

Die europäische Lärche ist aus ihrem natürlichen Verbreitungsgebiete, den Alpen und Karpathen erst zu Anfang unseres Jahrhunderts in die Vorberge und in das Flachland Mittel- und Nord-Europas hinabgestiegen. Sie wurde zuerst versuchsweise in kleinen Beständen, dann in immer grösserer Ausdehnung angebaut und zwar mit dem besten Erfolge. Sie zeigte ein schnelles Wachsthum, völlige Gesundheit und Anspruchslosigkeit an den Standort. Da das Lärchenholz von hoher Güte ist und geeignet erscheint, in vieler Beziehung das Eichenholz zu ersetzen, so bildeten um die Mitte unseres Jahrhunderts die ausgedehnten Lärchenbestände einen wichtigen Bestandtheil der Bewaldung Deutschlands und der Nachbarstaaten. Im Norden Schottlands war die Wiederaufforstung fast ausschliesslich mit der Lärche durchgeführt.

Etwa vor nunmehr 50 Jahren traten zum ersten Male Erkrankungen an der bisher gutwüchsigen Lärche auf und diese nahmen so schnell zu und waren so verderblicher Art, dass heute nur noch Reste jener Lärchenbestände übrig sind und vielfach der Anbau dieser werthvollen Holzart ganz aufgegeben worden ist.

Die Krankheitserscheinungen waren der mannigfachsten Natur. Insectenbeschädigungen zumal durch die Minirmotte der Lärche (Coleophora laricella Hbn.) und die Lärchenblattlaus (Chermes Laricis Hartig) wurden leicht als solche erkannt, waren aber doch nur in seltenen Fällen von der Bedeutung, dass ein Absterben der Bestände durch sie herbeigeführt wurde. Man glaubte desshalb zuerst, dass das wärmere Klima der neuen Heimath der Pflanze ungünstig sei. Dagegen sprach aber der Umstand, dass die in den ersten Decennien begründeten Bestände sich des besten Wohlseins erfreuten, wogegen die später erzogenen Lärchen oft schon im Saat- oder Pflanzbeete erkrankten. Die Erkrankung äusserte sich entweder durch das Absterben krebsartig grösser werdender Rindenstellen oder durch ein frühzeitiges Absterben und Abfallen der Benadelung. Im Jahre 1880 gab ich eine ausführliche Bearbeitung des Lärchenkrebses[1]) in welcher ich auf Grund geglückter Infectionsversuche nachwies, dass ein parasitärer Rindenpilz (Peziza Willkommii m.), der in den Alpen seine Heimath hat, die Krankheit verursacht. In den Hochalpen vertrocknen die Früchte vor der Sporenreife, da bei klarem Himmel im Sommer die Luft ausserordentlich trocken ist. Nur in der Nähe der Seen und in engen Thälern kann dort der Parasit sich erhalten. In den Vorbergen und im Flachlande fanden sich weit günstigere Verhältnisse für die Entwicklung dieses Pilzes, in Folge dessen der Lärchenkrebs sich schnell von Süden nach Norden verbreiten konnte, sobald einmal kleinere und grössere Lärchenbestände überall vorhanden waren. Vor 10 Jahren wies ich dann nach,[2]) dass im Frühjahre ein Erkranken der Lärchennadeln

---

[1]) Die Lärchenkrankheiten, insbesondere der Lärchenkrebspilz, Peziza Willkommii R. Hartig. In Untersuchungen aus dem forstbotanischen Institut in München I 1880. Berlin. Springer.

[2]) Allgemeine Forst- und Jagdzeitung 1885, Seite 326.

zuweilen in ausgedehnterem Maasse durch einen Pilz, Caeoma Laricis m. hervorgerufen werde, der seine Entwicklung während der übrigen Jahreszeit auf den Blättern der Zitterpappel als Melampsora Tremulae durchläuft, also immer an die Nachbarschaft dieser Holzart gebunden ist. Desshalb kann aber diesem Parasiten keine sehr grosse Bedeutung beigemessen werden. Das allgemeine Erkranken der Benadelung, das sich oft schon im Juli einstellt und in ganz Deutschland als die wichtigste Ursache der allmählich zunehmenden Schwächung der Wuchskraft der Lärche zu bezeichnen ist, wurde bisher als Folge ungeeigneten Standortes, insbesondere allzugrossen Feuchtigkeitsgehaltes der Luft betrachtet. Man war der Ansicht, dass die Lärche in feuchter, dumpfer Luft nicht genügend zu transpiriren vermöge. Allerdings sprach schon im Jahr 1883 ein scharfsichtiger Beobachter, Forstmeister Beling in Seesen[1]) die Vermuthung aus, dass diese Blatterkrankung einen parasitären Charakter habe und von einem kleinen Nadelpilz veranlasst werde, doch wurde die Krankheit, ihr Entstehen und ihre Ursache nicht näher untersucht. Ich selbst habe die Krankheit bisher nicht in Arbeit nehmen können, weil mich andere Untersuchungen seit einer Reihe von Jahren vollauf in Anspruch nahmen.

Im vorigen nasskalten Jahre trat nun aber die Braunfleckigkeit der Lärchennadeln in so ausserordentlichem Maasse in den Waldungen Oberbayerns ein, dass schon Anfang August der grössere Theil der Lärchennadeln abgeworfen und im September manche Bäume fast völlig entlaubt waren. Bei einer Reise über Salzburg ins Salzkammergut fand ich die Erkrankung auch dort allgemein verbreitet. Am 26. September konnte ich auf der Schmittenhöhe (1935 m) bei Zell am See feststellen, dass mit der zunehmenden Berghöhe die Erkrankung abnahm und bei 1500 m etwa verschwand.

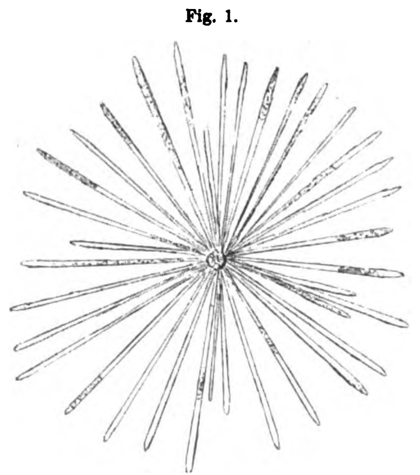
---

[1]) Allgemeine Forst- und Jagdzeitung, Jahrg. 1883.

In dieser Hochlage waren nur wenige Nadeln noch mit einzelnen braunen Flecken besetzt. Weiter aufwärts waren die Lärchen völlig gesund.

Die Krankheit äussert sich darin, dass die Nadeln der Lärche an einer oder an mehreren Stellen kleinere oder grössere braune Flecke bekommen. Die erkrankten Nadeln bleiben meist noch längere Zeit am Zweige sitzen und auf den Flecken treten sehr kleine schwarze Conidienpolster von 0.1—0.3 mm Grösse gruppenweise zusammenstehend auf (Fig. 1). Schon im Juli beginnt aber ein Abfallen der kranken und todten Nadeln, das sich besonders im unteren Theile der Baumkrone zu völliger Entnadelung steigern kann, wenn anhaltend nasses Wetter herrscht.

Fig. 1.



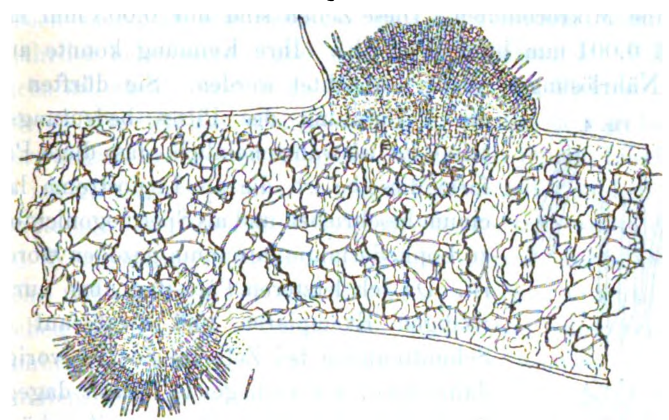
Ein Lärchennadelbüschel, an dem etwa die Hälfte der Nadeln theils ganz, theils stellenweise erkrankt ist. Nat. Gr.

Untersucht man die eben erkrankte Nadel an der verfärbten Stelle, so findet man reichliches, farbloses Mycel, theils in den Intercellularräumen, theils den Parenchymzellen eng anliegend. Die Mycelfäden sind reich verästelt und zwar biegen sich die Seitenhyphen meist nach rück- oder vorwärts, um die Parenchymzellen zu umschlingen und diesen die Nahrung zu entziehen (Fig. 2). Das Protoplasma zieht sich von der Zellwand zurück, ist aber noch freudig grün gefärbt. Das Chlorophyll wird auch an den getödteten und gebräunten Nadeln noch lange, ja theilweise bis zum nächsten Frühjahre in den inneren

Blattzellen erhalten; wogegen die der Oberhaut anliegenden Zellen sich bald rothbraun färben.



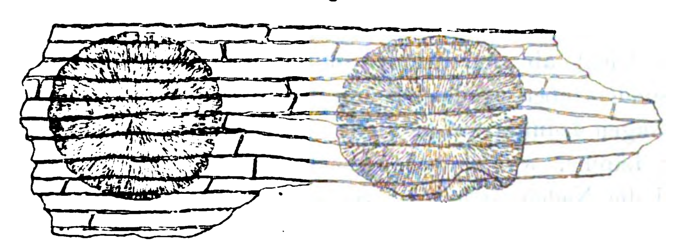
Fig. 2.



Längsschnitt durch die erkrankte Stelle einer Lärchennadel. Das Blattzellgewebe zeigt reichliches intercellulares Pilzmycel, welches grossentheils den Zellen eng anliegt. Auf der Ober- und Unterseite findet sich je ein schwarzbraunes Conidienpolster, auf dessen Aussenseite zahlreiche stabförmige Conidien gebildet werden. Auf dem oberen Polster sind sie meist durch Regen abgewaschen. Im Innern finden sich Höhlungen mit Mikroconidien erfüllt. Vergr. 100 : 1.

Auf der Ober- und Unterseite der erkrankten Blätter entstehen später unterhalb der Epidermis die zuerst dünn scheibenförmigen Conidienlager (Fig. 3), die dann zu pseudoparenchymatischen schwarzbraun gefärbten Polstern sich ver-

Fig. 3.



Jugendliche Conidienpolster vor dem Durchbrechen der Epidermis. Vergr. 100 : 1.

dicken und die Epidermis sprengen. Im Innern dieser Polster entstehen Höhlungen, deren Wände mit sehr zarten Basidien besetzt sind. Letztere bilden an der Spitze ausserordentlich kleine Mikroconidien. Diese Zellen sind nur 0.003 mm lang und 0.001 mm breit (Fig. 4b). Ihre Keimung konnte auch in Nährlösungen nicht beobachtet werden. Sie dürften für die Verbreitung des Pilzes bedeutungslos sein. Es ist wahrscheinlich, dass diese Pilzform dieselbe ist, die als Leptostroma laricinum beschrieben und als Spermogonienform zu Lophodermium laricinum gezogen worden ist. Da ich letzteren Parasiten aber nur in wenigen Exemplaren und zwar auf der Schmittenhöhe bei Zell am See im vorigen Jahre fand, der vorliegende Parasit dagegen überall verbreitet und seine Zugehörigkeit zu einer Sphaerella von mir ausser Zweifel gestellt ist, so ist entweder das Leptostroma laricinum nicht identisch mit unserer Pilzform oder die Zuziehung derselben zu Lophodermium laricinum ist eine irrige.

Fig. 4.

a. Stabförmige Conidien vor und nach dem Abfallen von den pfriemonförmigen Basidien. b. Mikroconidien aus dem Innern d. Polster. Vergr. 410 : 1.

Auf der Aussenseite dieser schwarzen Polster entwickeln sich nun zahllose stabförmige Conidien von 0.03 mm Länge. Sie stehen auf kurzen, an der Spitze farblosen pfriemenförmigen Basidien (Fig. 4a) und sind anfänglich einzellig. Bei der Reife zeigen sie eine und später drei Querwände, so dass sie demnach vierzellig sind. Sie fallen ausserordentlich leicht ab und werden durch den Wind fortgeführt. Besonders aber werden sie mit dem Regen abgewaschen und gelangen dadurch auf die tiefer stehenden Zweige und Nadeln der Lärche, wo sie schon nach wenigen Stunden keimen und die Nadeln inficiren. So erklärt sich die Erscheinung, dass die Nadelerkrankung an jedem Baume von oben nach unten an Intensität zunimmt. Da sich die Krankheit all-

jährlich wiederholt, so führt die vorzeitige Entnadelung zu einer zwar langsamen, aber im Laufe der Jahre sehr schädlich werdenden Entkräftung der Bäume. Die unteren Zweige sterben zuerst ab und bedecken sich mit Flechten. Der sich alljährlich belaubende Gipfel wird immer kleiner, der Höhenwuchs schwächer und wenn solche Bäume von Fichten oder anderen Waldbäumen umgeben sind, so werden sie von diesen überwachsen und gehen völlig zu Grunde. An jungen Lärchen, die ich Anfang September vorigen Jahres mit Conidien bestäubte und dann unter eine Glasglocke stellte, traten etwa nach drei Wochen reichliche Conidienpolster hervor, deren Oberfläche mit zahllosen Conidien besetzt war (Fig. 2 unten). An solchen Nadeln, die ich aus dem Walde zur Untersuchung heimbrachte, waren die Conidienpolster grossentheils ohne Conidien, oder es waren nur noch wenige auf ihnen zurückgeblieben (Fig. 2 oben).

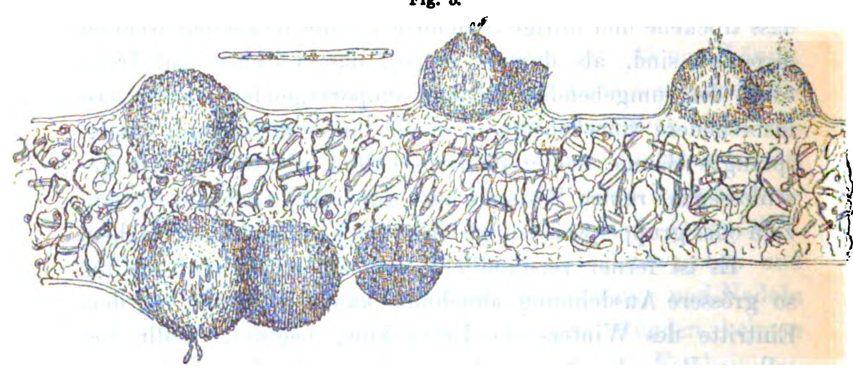
Es ist leicht erklärlich, wesshalb in nassen Jahren die Erkrankung viel schneller sich verbreitet, als in trockenen Jahren, denn bei feuchter Witterung entwickeln sich die Conidienpolster schneller und die Conidien keimen leichter, als bei trockener Witterung. Ebenso verständlich ist es, dass trockene und luftige Standorte für die Krankheit weniger disponirt sind, als dumpfe Lagen, dass Lärchen mit freier über den umgebenden Bestand emporragender Krone, dass insbesondere vorwüchsige in einem jüngeren Bestande eingesprengte Bäume sich gesünder erhalten, als Lärchen im geschlossenen, reinen Bestande oder gar solche Lärchen, die einzeln oder gruppenweise im gleich hohen Fichtenbestande stehen.

Es ist ferner verständlich, dass die Krankheit eine um so grössere Ausdehnung annehmen kann, je früher vor dem Eintritte des Winters die Erkrankung beginnt. Fällt dieselbe z. B. in den Anfang Juli, so bleiben im Flachlande noch vier Monate Zeit übrig bis zum Nadelabfall. In dieser langen Zeit kann der Parasit durch immer neue Infectionen und Coni-

dienbildung eine gewaltige Ausbreitung und Vermehrung erreichen, wie wir das besonders im Jahr 1894 beobachtet haben.

Es war vorauszusehen, dass sich auf oder in den erkrankten, am Boden liegenden Nadeln während des Winters und nächsten Frühjahres eine neue Fruchtform des Parasiten ausbilden würde, deren Sporen die Krankheit im nächsten Jahre wieder hervorrufen würden. Am 30. April d. J. sammelte ich unter den im Vorjahre stark erkrankten Lärchen des Freisinger Forstes bei München Nadeln, in deren Gewebe sich zwar noch unreife aber doch schon deutlich als Perithecien zu erkennende kuglige dunkelbraune Pilzfrüchte fanden. Zum Theil hatten sie die Blattepidermis schon durchbrochen. Das Pilzmycel im Innern der Nadeln war ein sehr derbes, dickwandiges und hellbraun gefärbtes, hatte mithin eine wesentliche Veränderung gegen das Vorjahr erfahren. Die zu Anfang Juni ausgereiften Perithecien sind den Conidienpolstern an Färbung ähnlich, aber etwas kleiner als diese, d. h. zwischen 0.1 bis 0.15 mm gross. Sie stehen theils vereinzelt, theils zu mehreren verwachsen meist in der Blattsubstanz versenkt, theils mehr auf der Blattoberfläche (Fig. 5).

Fig. 5.



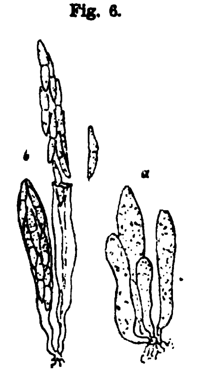
Längsschnitt durch eine vorjährige Lärchennadel, die bis Anfang Juni am Boden gelegen hatte. Das Mycel ist sehr dick, dickwandig und hellbraun geworden. Einzelne und untereinander verwachsene Perithecien enthalten im Innern farblose Schläuche mit je 8 Sporen. Rechts oben findet sich neben dem Perithecium eine Pycnide mit kleinen länglichen Mikroconidien. Vergr. 100:1.

Die Oeffnung im Scheitelpunkte der Perithecien ist in keiner Weise markirt und erkennt man sie nur aus dem Hervordringen der Schläuche oder Ascosporen. Aehnliche aber etwas kleinere Pycniden stehen vereinzelt oder sind mit den Perithecien verwachsen und enthalten ausserordentlich kleine, den Mikroconidien in den Conidienpolstern ähnliche Organe, die als gallertartige Masse aus den Pycniden ausgestossen werden (Fig. 5 oben rechts).

Von den am 30. April gesammelten Nadeln lagerte ich einen Theil im Feuchtraume des Laboratoriums auf nassen Sand und hier entwickelten sich schon bis zum 15. Mai in einer Anzahl der Perithecien reife Ascosporen (Fig. 6 b). Die keulenförmigen Ascen sind 0.05—0.06 mm lang, enthalten je 8 anfänglich einzellige, später zweizellige Sporen von 0.015—0.017 mm Länge, die farblos und an beiden verjüngten Enden abgerundet sind (Fig. 6 b).

Sie stehen dicht zusammengedrängt und werden gemeinsam aus der sich trichterförmig öffnenden Spitze des Schlauches ausgestossen, wobei die Contraction des Protoplasmaschlauches mitzuwirken scheint.

Fig. 6.



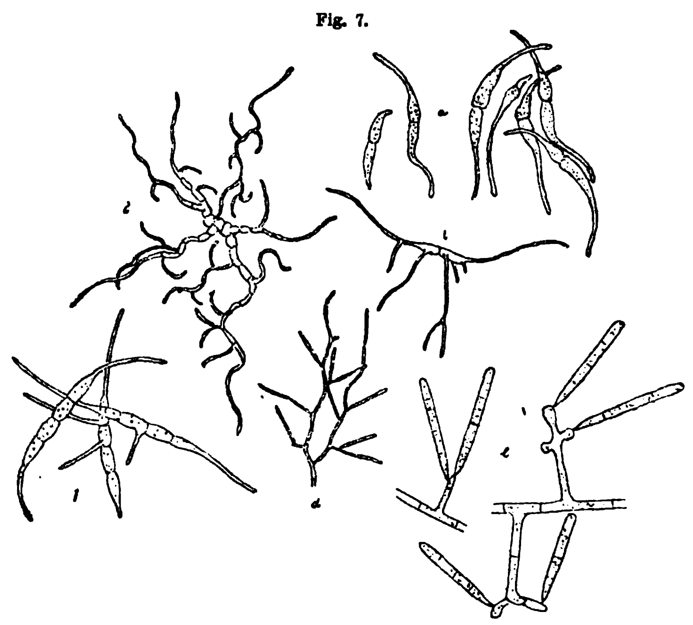
a. Unreife Schläuche ohne Paraphysen, 30. April.
b. Reife Schläuche, von denen der eine die Sporen aus dem geöffneten Scheitel eben entlassen hat. 1. Juni. Vergr. 410:1.

Am 11. Mai sammelte ich wiederum Nadeln bei Freising unter den im Vorjahre erkrankten Lärchen und constatirte, dass die meisten Perithecien auch jetzt noch nicht reif waren. Am 1. Juni waren die Perithecien im Walde grossentheils reif, ja einzelne derselben waren schon entleert, nachdem nahezu 14 Tage hindurch regnerisches Wetter geherrscht hatte.

Der Pilz gehört zur Gattung Sphaerella und mag, da er bisher nicht beschrieben ist, als Sph. laricina bezeichnet werden. Säet man die Ascosporen in reinem Wasser auf

den Objectträger aus, so keimen sie sofort und zwar erreichen sie schon nach 24 Stunden die in Fig. 7a dargestellte Entwicklungsstufe. In Nährgelatinelösung verbracht, erreichen

Fig. 7.



a. Ascosporen, im Wasser ausgekeimt. 24 Stunden nach der Aussaat. Vergr. 410:1. b. In Nährgelatine entwickelte Ascosporen nach 2 Tagen. Vergr. 280:1. c. Pilzrasen aus einer Ascospore in Nährgelatine nach 5 Tagen. Vergr. 100:1. d. Einzelne Hyphe der Pilzcultur. 3 Wochen nach der Aussaat mit stabförmigen Conidien. Vergr. 145:1. e. Stabförmige Conidien, theils auf kurzen Seitenästen, theils auf knopfförmig verdickten Trägern entstanden. Vergr. 410:1. f. Conidien, in Wasser ausgesät, nach 10 Stunden. Vergr. 410:1.

die jungen Pflänzchen nach weiteren 24 Stunden, also 2 Tage nach der Aussaat die Fig. 7b gezeichnete Entwicklung. Man sieht, dass nunmehr nicht nur die Sporen an den beiden Scheitelpunkten, sondern auch seitlich ausgekeimt sind. Fünf Tage nach der Keimung und Entwicklung in Nährlösung erhält man das Fig. 7c dargestellte Bild. Die ältesten Theile der Pflanze sind grösser geworden, d. h. der Durchmesser

der Hyphe hat sich vervielfacht. Die Hyphen sind septirt und reich verästelt. Dabei tritt eine Eigenthümlichkeit hervor in der Wachsthumsrichtung der Längshyphen und ihrer Seitenzweige, die darin besteht, bogenförmig hin und her zu wachsen. Die Seitenhyphen haben fast stets die Neigung, bogenförmig nach rückwärts zu wachsen. Es kommt dabei der Gedanke, dass es sich bei dieser Wachsthumseigenthümlichkeit um eine erblich gewordene Eigenschaft handelt, die durch das schon oben beschriebene Wachsthum im Blattparenchymgewebe erworben worden ist. Die Seitenhyphen im Blattgewebe biegen sich alsbald um die benachbarten Blattzellen, der Aussenseite sich eng anlegend, sie besitzen diese Eigenschaft auch dann, wenn sie in künstlicher Nährlösung cultivirt werden. Es erinnert das an die Fortsetzung der windenden Wachsthumsbewegung der Schlingpflanzen, z. B. Bohnen, nachdem der Gegenstand, an dem sich in Folge von Contactreiz der Stengel herumgelegt, von der Pflanze überwachsen worden ist. Eine weitere Entwicklung der Pilzkultur erfolgt nur dann, wenn dieselbe nicht zu sehr von Nährgelatine bedeckt ist, sondern eine Entwicklung in feuchter Luft ausserhalb des Nährsubstrates erfolgt. Bis zum 20. Tage nach der Aussaat hatte sich ein graugrüner Rasen von etwa 4 mm Durchmesser entwickelt, dessen in die Luft ragende feine Hyphen genau dieselben stabförmigen vierzelligen Conidien auf kleinen seitlichen Auswüchsen entwickeln, die auf den Conidienpolstern der Lärchennadeln entstehen (Fig. 7d, e). Damit ist der Zusammenhang beider Pilzformen zweifellos bewiesen.

Nach der Aussaat in Wasser keimten auch diese Conidien sehr bald und hatten schon nach 20 Stunden die in Fig. 7f dargestellte Entwicklungsstufe erreicht. In der Folge machten sie dieselbe Entwicklung durch, die für die Ascosporen dargestellt ist. Es wird somit, sowohl für die Ascosporen als auch für die Conidien in günstigen Ernährungsverhält-

nissen ein Zeitraum von 3 Wochen verlaufen, bis nach der Infection wieder neue Conidienpolster mit reifen Conidien zur Ausbildung gelangen. Die Vergrösserung der Pilzcultur nach dem Beginne der Conidienbildung war eine sehr langsame aber dadurch ausgezeichnete, dass am Rande des Pilzrasens die Nährgelatine eine fuchsrothe Färbung erhielt. Es ist dies derselbe Farbenton, den die unter der Epidermis gelegenen Zellen der kranken Lärchennadeln einige Wochen nach der Infection erhalten.

Aus den vorstehend mitgetheilten Untersuchungsergebnissen lässt sich nun eine Reihe von bisher unerklärbaren Krankheitserscheinungen leicht verstehen.

In reinen Lärchenbeständen hindert nichts das Aufsteigen der reifen Ascosporen durch den Luftzug zu den Nadeln der Baumkronen und die nahe zusammenstehenden Bäume inficiren sich gegenseitig durch die Conidien. Besonders schädlich ist aber die Untermischung der Lärche mit der Fichte, weil die abfallenden kranken Nadeln auf den Fichtenzweigen in grosser Menge liegen bleiben, hier ebenso Perithecien entwickeln, wie auf den Streu- und Moosdecken des Erdbodens und die reifen Ascosporen mit grösster Leichtigkeit seitlich auf die Nadeln der benachbarten Lärchen verbreiten.

In der That hat sich die Mischung dieser beiden Holzarten als verderbenbringend für die Lärche erwiesen. Nur dann blieb sie gesund und kräftig, wenn sie auf ihr besonders zusagendem Boden von Jugend auf weit über den Fichtenbestand hinauswuchs, so dass die Kronen der Lärchen unbehindert und dem Luftzuge ausgesetzt über die Fichtenkronen hinausragten.

Dagegen kenne ich eine Anzahl von Lärchenbeständen, die mit Rothbuchen untermischt sind, wie z. B. den Lärchenwald oberhalb Tegernsee, die sich der trefflichsten Gesundheit und des herrlichsten Wuchses erfreuen. Im Forstamt

Freising befindet sich ein ca. 80 jähriger Lärchenbestand, der vor 40 Jahren sehr krank war, so dass er stark durchhauen und mit Rothbuchen unterbaut wurde, weil man glaubte, dass der schlechte Wuchs Folge der Bodenverschlechterung sei. Dieser Bestand ist seitdem völlig gesund geworden und vom trefflichsten Wuchse. Er war noch Ende Oktober vorigen Jahres voll benadelt und keine Spur der Blattkrankheit war in ihm zu finden. An den Lärchennadeln entwickelte sich erst am Boden ein saprophytischer Pilz mit schwarzen, kugelförmigen, glatten Pycniden, der bisher unbekannt war und von Herrn Allescher beschrieben und neu benannt worden ist.[1])

Diese günstige Wirkung der Buche auf die Gesundheit der Lärche erklärt sich daraus, dass die kranken, vom August bis Oktober abfallenden Lärchennadeln Ende Oktober von dem abfallenden Buchenlaube grösstentheils zugedeckt werden, wodurch das Entweichen der Ascosporen nach oben verhindert wird. Insoweit aber doch einzelne Sporen in die Luft gelangen, findet eine förmliche Filtration derselben in dem dichten Laubdache des Buchenbestandes statt, das zu Anfang Juni schon vollständig entwickelt ist.

---

[1]) Herr Andr. Allescher stellt für diese neue Art die nachstehende Diagnose auf: „Pseudocenangium Hartigianum, Peritheciis sparsis, erumpenti superficialibus, globoso-depressis, sicco subcupuliformibus, membranaceis atro-olivaceis, primum clausis, dein late apertis, margine oris lobato, ca. 100—150 μ diam.; sporulis numerosis, filiformibus, rectis, utrinque obtusiusculis, minute multiguttulatis, hyalinis, ca. 40—60 basidiis nullis. Hab. in acubus putrescentibus Laricis europaeae".

Dass es sich bei diesem Pilze lediglich um einen Saprophyten handelt, geht schon daraus hervor, dass die Sporenfrüchte im Herbste auf den vorjährigen Nadeln reiften und die fadenförmigen Conidien sofort nach der Aussaat keimten, wogegen im Frühjahre auf den im Vorjahre abgefallenen Nadeln noch Anfang Juni nur unreife Conidienfrüchte zu finden waren. Infectionsversuche, die ich im September vorigen Jahres auf grünen Lärchennadeln ausführte, misslangen.

Auch die Thatsache, dass die Lärche im Hochgebirge gesund bleibt, erklärt sich nun in einfacher Weise.

Wir haben gesehen, dass die Ascosporenfrüchte sich im Früjahre auf den am Boden liegenden Lärchennadeln entwickeln und bei uns erst Anfang Juni zur Sporenreife gelangen. Vor Juli treten hierorts neue Conidienpolster auf den Lärchennadeln nicht auf. Dem Parasiten stehen also vier Monate zur allgemeinen Verbreitung durch Conidien zur Verfügung.

Je weiter wir bergauf steigen, um so später verschwindet der Schnee, um so später kann mithin die Ausbildung der Perithecien beginnen, um so später werden die Ascosporen reif, um so kürzer wird die Zeit, in welcher der Parasit sich durch Conidienbildung zu vermehren vermag, zumal der Winter ja entsprechend früher eintritt. In einer Hochlage von 1500 m beginnt die Vegetation etwa $2^1/_2$ Monate später als im Flachlande, d. h. etwa Anfang Juni, die Reife der Ascosporen wird demnach auch um $2^1/_2$ Monate hinausgeschoben, beginnt also erst Mitte August. In der That fand ich in dieser Hochlage am 26. September an den Lärchennadeln nur wenige Flecken und auf diesen kaum die ersten Spuren der Conidienpolster. Am 28. September lagen diese Lärchenparthien schon im Schnee.

Daraus ist zu ersehen, dass von einer gewissen Höhenlage aufwärts zwar die Lärche bei einer Vegetationsdauer von $3^1/_2$—4 Monaten noch gedeihen kann, dass aber die Sphaerella nicht mehr die zu ihrem Gedeihen erforderliche Vegetationszeit vorfindet, wesshalb die Lärche völlig gesund bleibt, wenn ihr auch der Standort wegen der Kürze der Vegetationsperiode nicht mehr so zusagt, wie die tieferen Lagen. Aehnliches gilt offenbar auch zur Erklärung des Vorkommens der Lärche in Sibirien. Sie wächst dort wie im Hochgebirge sehr langsam, im Flachlande sehr schnell. Dort können ihr die Parasiten nicht mehr beikommen, hier

werden sie von derselben unerbittlich bekämpft. Man gebe desshalb den Anbau dieser Holzart in den Vorbergen und im Flachlande, woselbst ihr das Klima viel besser behagt, als in der ursprünglichen Hochgebirgslage, dem sogenannten „natürlichen Standorte“ nicht auf, sondern man schütze sie gegen ihre Feinde, indem man sie nur in Untermischung mit der Rothbuche anbaut und letzterer die Aufgabe zuweist, den Nadelpilz der Lärche zu vernichten. Da in reinen Beständen der Lärchenkrebspilz leicht verderbliche Ausbreitung findet, so behandle man die Lärche nur als einen Baum der Mischwälder, in welchen er unter den Nadelholzarten die erste Stelle einzunehmen hat.

Vom Anbau der Lärche darf man aber von vorneherein da Abstand nehmen, wo ständige Luftfeuchtigkeit die Entwicklung ihrer Pilzparasiten in hohem Grade begünstigt. So gedeiht z. B. die Lärche im Bayerischen Walde nicht wegen der Nebel, die dort oft lange Zeit hindurch nicht weichen. Die Pilzentwicklung wird dadurch in einem so hohen Grade begünstigt, dass man von vorneherein verzichten sollte, diesen Waldbaum zu erziehen.

Zum Cauchy'schen Integralsatze.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 39—72 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 15. Juli.*)

In der Einleitung meiner Mittheilung über den Cauchy'schen Integralsatz habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass gewisse auf Continuitäts-Betrachtungen gegründete Beweise jenes Satzes insofern lückenhaft erscheinen, als sie auf der stillschweigend gemachten Annahme beruhen, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets gleichmässig gegen den Werth $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich stets eine positive Grösse ϱ so fixiren lasse, dass für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon, \quad \text{falls: } |h|<\varrho.$$

Ich fügte hinzu, man müsse also, um jene Beweise haltbar zu machen, entweder die fragliche Bedingung als eine specielle, der Function $f(z)$ a priori zukommende Eigenschaft ausdrücklich in die Voraussetzung aufnehmen,[1]) oder

[1]) In dem seither erschienenen ersten Bande von Weierstrass' Werken findet man einen Beweis des Laurent'schen Satzes, bei welchem in der That die fragliche Bedingung bezw. eine ihr im wesentlichen aequivalente als specielle Voraussetzung erscheint.

versuchen, dieselbe als unmittelbare Folge einfacherer Eigenschaften, etwa der Stetigkeit von $f'(z)$ darzustellen;[1]) in wieweit dies möglich wäre, liess ich dahingestellt und sprach nur die Vermuthung aus, dass der Beweis, wenn überhaupt durchführbar, auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führen dürfte. Nachdem ich indessen neuerdings erkannt, dass der fragliche Beweis nicht nur möglich ist, sondern auch mit verhältnissmässig einfachen Mitteln geführt werden kann, möchte ich denselben — zumal der Satz an sich mir nicht ganz unwichtig erscheint — an dieser Stelle mittheilen.[2])

Es sei $f(z)$ im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches T eine endliche, eindeutige und stetige Function der complexen Variablen z. Liefert sodann die Substitution $z = x + yi$ die Beziehung:

$$f(z) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y), \tag{1}$$

wo $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ reelle Functionen der reellen Veränderlichen x, y bedeuten, so folgt bekanntlich aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(z)$, dass auch $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ endliche und stetige Functionen von x, y und zwar für den Bereich T gleichmässig stetig sind.

Es sei ferner $f'(z)$ gleichfalls in T (d. h. immer im Innern und auf der Grenze von T) endlich, eindeutig und stetig, so hat man speciell:

---

[1]) In meinem Aufsatze: „Ueber die Entwicklung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen" (S. 39 ff. dieses Bandes) habe ich u. a. gezeigt, dass für „analytische", d. h. durch Potenzreihen definirte Functionen die betreffende Bedingung stets erfüllt ist (a. a. O. S. 83, 84).

[2]) Uebrigens setzt Herr Goursat, wie ich erst nachträglich bemerkt habe, bei seinem Beweise des Cauchy'schen Satzes (Act. math. T. IV, p. 196) den fraglichen Hilfssatz ausdrücklich als bekannt voraus, sodass also hier die von mir erhobene Einwendung hinfällig erscheint.



$$f'(z) = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial (iy)},$$

wobei es im Innern von T freisteht, diese partiellen Differential-Quotienten als vor- oder rückwärts genommen zu verstehen; oder wenn:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \varphi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \varphi_2(x,y)$$

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \psi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \psi_2(x,y)$$

gesetzt wird:

$$(2) \qquad f'(z) = \begin{cases} \varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) - i\cdot\varphi_2(x,y). \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass die partiellen Differential-Quotienten $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$ in T gleichfalls endliche, eindeutig bestimmte Werthe besitzen, welche den Bedingungen genügen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y) = \psi_2(x,y) \\ \varphi_2(x,y) = -\psi_1(x,y), \end{cases}$$

und dass sie — in Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ — in T gleichmässig stetige Functionen von x,y sind, d. h. jeder beliebig klein vorgeschriebenen positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass für alle x,y des Bereiches T:

$$(4) \qquad |\chi(x+h, y+k) - \chi(x,y)| < \delta \quad \text{für: } h^2+k^2 < \varrho^2,$$

(wo χ jede beliebige der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ bedeutet).

Dies vorausgeschickt gilt nun der Satz:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze des Bereiches T, so convergirt der Ausdruck:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|$$

mit Δz in T gleichmässig gegen Null, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse ε lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon, \quad \text{falls: } |\Delta z|<\varrho.$$ [1]

Beweis. Setzt man $\Delta z = h + ki$, so wird zunächst:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)}{h+ki}+i\cdot\frac{\psi(x+h,y+k)-\psi(x,y)}{h+ki}$$

$$=\left\{\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y+k)}{h}+i\cdot\frac{\psi(x+h,y+k)-\psi(x,y+k)}{h}\right\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$

$$+\left\{\frac{\varphi(x,y+k)-\varphi(x,y)}{k}+i\cdot\frac{\psi(x,y+k)-\psi(x,y)}{k}\right\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

In Folge der nach dem oben Gesagten aus der Voraussetzung folgenden Stetigkeitseigenschaften der Functionen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ und ihrer partiellen Differential-Quotienten ist es gestattet auf die sämmtlichen hier auftretenden Differenzen-Quotienten den Rolle'schen Mittelwerth-Satz anzuwenden.

Bezeichnet man also mit $\vartheta, \vartheta', \eta, \eta'$ reelle Grössen, welche dem Intervalle von 0 bis 1 (mit Einschluss der Grenzen) angehören, so kann man setzen:

---

[1]) Dabei kommen natürlich, falls z auf der Grenze von T oder in deren Nähe liegt, nur solche Δz in Betracht, für welche $z+\Delta z$ noch dem Bereiche T angehört.

Der analoge Satz für Functionen einer reellen Veränderlichen findet sich bei Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, p 234; desgl. bei Stolz, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung, p. 55.

$$(5)\qquad \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k) + i\cdot\psi_1(x+\vartheta' h, y+k)\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$

$$+ \{\varphi_2(x, y+\eta k) + i\cdot\psi_2(x, y+\eta' k)\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

Es ist aber andererseits nach Gl. (2):

$$\begin{aligned} f'(z) &= \varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y) \\ &= \{\varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{i\cdot\varphi_1(x,y) - \psi_1(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki} \end{aligned}$$

oder mit Benützung der Beziehungen (3):

$$(6)\qquad \begin{aligned} f'(z) &= \{\varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{\varphi_2(x,y) + i\cdot\psi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki}. \end{aligned}$$

Subtrahirt man jetzt diese Gleichung von Gl. (5), so ergiebt sich:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)$$

$$= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k) - \varphi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$

$$+ \{\psi_1(x+\vartheta' h, y+k) - \psi_1(x,y)\}\cdot\frac{hi}{h+ki}$$

$$+ \{\varphi_2(x, y+\eta k) - \varphi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki}$$

$$+ \{\psi_2(x, y+\eta' k) - \psi_2(x,y)\}\cdot\frac{ki}{h+ki}$$

Nun kann man nach dem oben Gesagten (s. Ungl. (4)) ϱ so fixiren, dass für $h^2+k^2 < \varrho^2$, also $|h+ki| < \varrho$, der

absolute Betrag jeder Klammergrösse unter eine beliebig kleine positive Grösse, die mit $\frac{\varepsilon}{4}$ bezeichnet werden möge, herabsinkt. Da ausserdem bei beliebigen, nicht gleichzeitig verschwindenden reellen Werthen von h und k stets:

$$\left|\frac{h}{h+ki}\right| \leqq 1 \qquad \left|\frac{k}{h+ki}\right| \leqq 1,$$

so folgt schliesslich:

$$(7) \qquad \left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right| < \varepsilon \qquad \text{für: } |\Delta z| < \varrho.$$

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz, d. h. derjenige Satz, welcher für den exacten Beweis des Cauchy'schen Integral-Theorems erforderlich war, bewiesen.

An dieses Resultat lässt sich nun noch die folgende für die schärfere Begründung der gesammten Cauchy'schen Functionen-Theorie nicht unwichtige Betrachtung knüpfen. Schreibt man in Ungl. (7) z' statt z, so wird:

$$(8) \quad \left|\frac{f(z'+\Delta z)-f(z')}{\Delta z} - f'(z')\right| < \varepsilon \qquad \text{für: } |\Delta z| < \varrho$$

unter der Voraussetzung, dass auch z' und $z'+\Delta z$ dem Bereiche T angehören. Setzt man dann in (7): $\Delta z = \zeta$, in (8): $\Delta z = \zeta'$, wo die ζ, ζ' zwei beliebige complexe Grössen bedeuten, deren absoluter Betrag unterhalb ϱ liegt, so folgt durch Subtraction der Ungleichungen (7) und (8):

$$(9) \quad \left|\frac{f(z'+\zeta')-f(z')}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta} - \{f'(z')-f'(z)\}\right| < 2\varepsilon.$$

In Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ kann man jetzt z' nahe genug an z wählen, dass $|f'(z')-f'(z)|$ beliebig klein wird; insbesondere wird, wenn man $|z'-z| < \varrho$ nimmt,

$|f'(z') - f'(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$,[1] sodass Ungl. (9) die folgenden nach sich zieht:

$$
(10) \qquad \left| \frac{f(z'+\zeta') - f(z')}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| < \delta
$$

$$
\text{für: } \begin{cases} |\zeta'| < \varrho, \ |\zeta| < \varrho \\ |z' - z| < \varrho \end{cases}
$$

(wenn man zur Abkürzung δ statt $\frac{5}{2}\varepsilon$ schreibt). Man kann somit an Stelle des oben bewiesenen Satzes jetzt auch den folgenden setzen:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze eines gewissen Bereiches T, so ist der Differenzen-Quotient:

$$
\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}
$$

eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und ζ für alle z des Bereiches T und alle ζ, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze ϱ liegt, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass die Ungleichungen (10) stattfinden.

---

[1]) Setzt man nämlich:

$$
z' - z = h + ki,
$$

so wird:

$$
\begin{aligned}
f(z') - f(z) &= \varphi_1(x+h,\ y+k) - \varphi_1(x,y) \\
&\quad + i\{\psi_1(x+h,\ y+k) - \psi_1(x,y)\},
\end{aligned}
$$

also:

$$
\begin{aligned}
|f(z') - f(z)| &\leqq |\varphi_1(x+h,\ y+k) - \varphi_1(x,y)| \\
&\quad + |\psi_1(x+h,\ y+k) - \psi_1(x,y)|
\end{aligned}
$$

d. h. auf Grund der oben getroffenen Bestimmung:

$$
|f(z') - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } |h+ki| < \varrho.
$$

Der Satz in dieser Form besitzt nun die wichtige Eigenschaft, auch umkehrbar zu sein, d. h. man kann aus dem Bestehen der Ungleichungen (10) — welche offenbar die Endlichkeit und Eindeutigkeit von $f(z)$ als selbstverständliche Voraussetzung enthalten — die Stetigkeit von $f(z)$, sowie die Endlichkeit, Eindeutigkeit und Stetigkeit von $f'(z)$ folgern:

Setzt man nämlich in (10) $z' = z$, so wird:

$$(11)\quad \left|\frac{f(z+\zeta')-f(z)}{\zeta'}-\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}\right|<\delta \text{ für: } \begin{Bmatrix}|\zeta'|\\|\zeta|\end{Bmatrix}<\varrho,$$

und hieraus folgt zunächst, dass der Differenzen-Quotient $\dfrac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}$ für $\lim \zeta = 0$ einen eindeutig bestimmten, endlichen Grenzwerth besitzt, sodass man setzen kann:

$$(12)\qquad \lim_{\zeta=0}\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta} = f'(z),$$

d. h. $f(z)$ besitzt in T durchweg einen endlichen, eindeutig bestimmten Differential-Quotienten, ist also *eo ipso* auch eine stetige Function von z. Um auch noch die Stetigkeit von $f'(z)$ zu erkennen, bemerke man, dass aus (11) und (12) folgt:

$$(13)\qquad \left|f'(z)-\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}\right|\leqq\delta \quad\text{für: } |\zeta|<\varrho$$

und analog für jeden anderen dem Bereiche T angehörigen Werth z':

$$(14)\qquad \left|f'(z')-\frac{f(z'+\zeta)-f(z')}{\zeta}\right|\leqq\delta.$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$(15)\quad |f'(z')-f'(z)|\leqq 2\delta+\left|\frac{f(z'+\zeta)-f(z')}{\zeta}-\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}\right|,$$

und wenn man jetzt z' der Bedingung unterwirft: $|z'-z|<\varrho$, so findet man schliesslich mit Benützung von Ungl. (10):

$$(16)\qquad |f'(z')-f'(z)|<3\delta,$$

womit die fragliche Umkehrung des obigen Satzes[1]) in allen Theilen bewiesen ist. Nunmehr kann man aber jenen Satz mit der eben bewiesenen Umkehrung in die folgende prägnantere Form zusammenfassen:

Die ***nothwendige und hinreichende*** Bedingung dafür, dass die im Bereiche T endliche und eindeutige Function $f(z)$ daselbst stetig ist und einen endlichen, eindeutigen und stetigen Differential-Quotienten $f'(z)$ besitzt, besteht darin, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ für alle Werthe z des Bereiches T und alle Δz, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze liegt, eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und Δz sein muss.

Die gleichmässige Stetigkeit des Differenzen-Quotienten in dem näher definirten Sinne bildet also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die endliche und eindeutige Function $f(z)$ im Sinne Cauchy's synektisch ist.

Ich möchte schliesslich diese Gelegenheit benützen, um den in meinem früheren Aufsatze mitgetheilten historischen Notizen einige Ergänzungen hinzuzufügen.

Ich habe dort u. a. hervorgehoben, dass der auf die Integralformel:

$$\int P\,dx + Q\,dy = \pm\int\int\left\{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right\} dx\cdot dy$$

gegründete Beweis des Cauchy'schen Satzes bereits von Cauchy selbst gekannt und auch in der Hauptsache publicirt worden sei, und glaubte aus dem Umstande, dass jener Beweis — im Gegensatze zu dem ursprünglich von Cauchy gegebenen und dessen Modificationen — ganz allgemein

---

[1]) Das Analogon für Functionen einer reellen Variablen findet man bei Harnack, Elemente der Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 37.



als der Riemann'sche bezeichnet wird, den Schluss ziehen zu dürfen, dass jene Thatsache bisher „völlig unbemerkt" geblieben sei.[1]) Ich hätte statt dessen etwa sagen sollen: „nahezu unbemerkt". Denn ich habe inzwischen die Wahrnehmung gemacht, dass Casorati in der historischen Einleitung seiner „Teorica delle funzioni di variabili complesse" jener Cauchy'schen Note ausdrücklich Erwähnung thut. Das Gleiche ist auch in dem jüngst erschienenen Referate der Herren Brill und Nöther über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen" geschehen.[3]) Immerhin kann wohl kaum bestritten werden, dass das mathematische Publikum mit Ausnahme einer sicherlich sehr kleinen Minderheit den fraglichen Beweis bisher ganz ausschliesslich auf Riemann's Conto gesetzt hat.

Ferner habe ich inzwischen bemerkt, dass auch Herr Falk im Jahre 1883 einen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes veröffentlicht hat.[4]) Das Original der betreffenden Arbeit ist mir leider bisher nicht zugänglich gewesen. Indessen lässt sich aus einem Auszuge, den der Verfasser selbst in einem Briefe an Herrn Hermite mitgetheilt hat,[5]) immerhin so viel ersehen, dass jener Beweis in seiner ganzen Anlage sehr einfach, wenn auch vielleicht etwas weniger natürlich erscheint, als der von mir gegebene, und dass er insbesondere wieder auf gewissen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Integrations-Curven beruht, deren principielle Ueberflüssigkeit ich gerade nachzuweisen versucht habe.

1) a. a. O. p. 44.

2) a. a. O. p. 79. Späterhin (p. 370) wird freilich der fragliche Beweis wiederum lediglich auf die Riemann'sche Dissertation zurückgeführt.

3) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. III, p. 173.

4) Démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction complexe (Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis, Ser. III, T. XII).

5) Darboux, Bulletin, 2. série, T. VII, p. 137.

Sitzung vom 6. Juli 1895.

1. Herr H. SEELIGER legt eine Abhandlung des Herrn Gymnasiallehrers Dr. Adolf Schmidt in Gotha: „Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials" vor, welche in die Denkschriften aufgenommen werden soll.

2. Herr W. DYCK macht eine Mittheilung: „Beiträge zur Potentialtheorie. II. Die Gauss'sche Formel für die gegenseitige Umschlingung zweier Raumcurven und ihre Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten. Darstellung als Kronecker'sche Charakteristik eines Funktionensystems." Der Bericht hierüber folgt im nächsten Hefte.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1895.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. 16. Band. 1894. 8⁰.

Historische Gesellschaft in Aarau:

Argovia. Band XXV. 1894. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

State Library Bulletin. Legislation No. 5. 1895. 8⁰.

Geschichts- und Alterthumsforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen. Band X, Heft 4. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. Band 6. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Augsburg:

Zeitschrift. Band XXI. 1894. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIV, No. 116—118. 1895. 4⁰.

Historischer Verein in Bamberg:

54. u. 55. Bericht f. d. Jahre 1892 u. 1893. 1893/94. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band X, No. 2. 3. 1894/95. 8⁰.

Historische und antiquarische Gesellschaft in Basel:

19. Jahresbericht über das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.
Mittheilungen. N. F. IV. 1894. fol.

Genootschap van kunsten en wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 37, afl. 4—6. Deel 38, 1—3. 1894. 8⁰.
Notulen. Deel 32, No. 1—3. 1894. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 47, 3. stuk. 1894. 4⁰.
Catalogus der ethnologische verzameling. 4. druk. Supplement. 1894. 8⁰.
Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811. Deel XII. 1894. 8⁰.
Dagh-Register gebouden int Casteel Batavia Anno 1665. 1894. 8⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. 16, 1893. 1894. fol.
Regenwaarenemingen. XV. Jahrg. 1893. 1894. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Srpski etnografski sbornik. Kniga I. 1894. 8⁰.
Glas. XX, No. 45—47. 1894/95. 8⁰.
Spomenik. No. 28. 1895. 4⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

On the development and structure of the whale. Part I. By Gust. Guldberg und Fridtjof Nansen. 1894. fol.
Aarbog für 1893. 1894. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Bulletin of the Department of Geology. Vol. I. 1893—1895. 8⁰.
Register of the University of California 1893—1894. 8⁰.
Biennial Report of the President of the University 1893. Sacramento 1894. 8⁰.
Annual Report of the Secretary of the Board of Regents of the University of California for the year ending June 30. 1894. Sacramento 1894. 8⁰.
A brief account of the Lick Observatory by Edw. S. Holden. Sacramento 1895. 8⁰.
Report of work of the agricultural experiment stations for 1892/93. Sacramento 1894. 8⁰.
Report of viticultural work during the seasons 1887—80 by L. Paparelli. Sacramento 1892. 8⁰.
List of recorded Earthquakes in California, by Edw. S. Holden. Sacramento 1887. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1894, No. 39—53. 1895, No. 1—25. gr. 8⁰.
Inscriptiones graecae insularum maris Aegaei. Fasc. I. 1895. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für das Jahr 1893. Band XIV. 1894. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 27. Jahrg., No. 19—21. 28. Jahrg., No. 1—11. 1894/95. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Band XXV. 1895. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 46, Heft 3. 1894. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1888. Abt. I—III. Braunschweig 1894. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VIII. 1894. No. 20—26. Band IX. 1895. No. 1—7. 8⁰.

Verhandlungen. Jahrg. 1894/95, No. 1—15. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Das Gesetz von der Erhaltung der Energie und seine Bedeutung für die Technik. Rede von A. Slaby. 1895. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band IX, Heft 4. Band X, Heft 1. Ergänzungsheft 3. 1895. 4⁰.

Antike Denkmäler. Band II, Heft 2. 1895. fol.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1893. 1895. fol.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung 1894. Heft 2. 1895. fol.

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Bremen. Jahrg. 5. 1895. fol.

Deutsches Meteorol. Jahrb. für 1891. Heft 3. 1895. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXIV, Heft 1. Berlin 1895. 8⁰.

Verein zur Verbreitung des Gartenbaues in den preussischen Staaten in Berlin:

Gartenflora. 43. Jahrgang. 1894. 4⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band IX, Heft 11. 12. Band X, Heft 1—5. 1894/95. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XV. Jahrgang 1895. Heft 1—6. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 20. Band. Zürich. 1895. 8⁰.

Natural History and Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. IX, 1. 1894. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

Memorie. Serie V. Tom. III, fasc. 1—4. 1893. 4⁰.

R. Deputazione di storia patria in Bologna:

Atti. III. Serie. Vol. XII, fasc. 4—6. 1895. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1894. No. 23. 24. 1895. No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. XXIX. 1894. 8⁰.

Public Library in Boston:

43. annual Report 1894. 1895. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. XXVI, part 2. 3. 1894. 4⁰.
Memoirs. Vol. III, No. 14. 1894. 4⁰.
Occasional Papers IV. 1894. 8⁰.

Stadtmagistrat zu Braunschweig:

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Band II, Abth. 1. 1895. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Band XIII, Heft 2. 1895. 8⁰.
Beiträge z. nordwestdeutschen Volks- u. Landeskunde. Heft 1. 1895. 8⁰.

Historisch-statistische Sektion der k. k. mährischen Landwirthschafts-Gesellschaft in Brünn:

Schriften. Band 29. 1895. 8⁰.
Notizenblatt. Jahrg. 1894. 4⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. 32. Band 1893. 1894. 8⁰.
XII. Bericht der meteorol. Commission. 1894. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tome 7, No. 11. Tome 9, No. 1—4. 1894/95. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Annuaire 1895. 61ᵉ année. 8⁰.
Bulletin. 3ᵉ Sér. Tome 28, No. 12. Tome 29, No. 1—5. 1894/95. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XIV, fasc. 1. 2. 1895. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome II, 4—7. 1888/93. 8⁰.

American philosophical Association in Bryn Manor (Pensylvanien).

Transactions. Vol. 25. 1894. Boston 1894. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Mathematische u. naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XII. 1. Hälfte. Berlin 1895. 8⁰.
Ungarische Revue. 14. Jahrg. Heft 9. 10. 1895. Heft 1—4. Budapest 1894. gr. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Jahresbericht für 1892. 1894. 8⁰.
Földtani közlöny. Band XXIV, Heft 11. 12. 1894. 8⁰.
Geologische Specialkarte von Ungarn. Blatt Zone 14. Col. XXX mit erklärendem Text, 1894. 8⁰.

Society of natural sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. 5, No. 4. 1894. 8⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Documente privitóre la istoria Românilor. Suppl. I. Vol. 6. Suppl. II. Vol. 2. 1895. 4⁰.
Analele. Ser. II. Tome 14. 1891—92. Sect. liter. u. Sect. Scientif.
„ 15. 1892—93. Sect. liter. u. partea administr.
„ 16. 1893—94. Partea administr. 1893/94. 4⁰.
Festreden 1894/95. 4⁰.
Basmele Romåne. Studiu comparativŭ de Lăzar, Săiuénu. 1895. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:
Anales. Seccion 2. Año 1893. 1894. fol.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:
Bulletin. 4e Sér. Vol. 8, fasc. 3. 4. 1895. 8°.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:
Monthly Weather Review 1894 July—December. 1895. fol.
Meteorological Observations 1894 July—December. 1895. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. V, part 4. 5. 6. Vol. VII, 1. 2. 1894. fol.
Instructions to observers of the Indian Meteorological Department. By J. Eliot. 1894. 8°.
Rainfall of India. IIId year 1893. 1894. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:
Bibliotheca Indica. New Ser. No. 847—849. 1894. 8°.
Journal. No. 338. 340—343. 1894/95. 8°.
Proceedings. 1894. No. X. 1895. No. I—III. 1894/95. 8°.

Geological Survey of India in Calcutta:
Records. Vol. 27, part 4. Vol. 28, part 1. 2. 1894/95. 4°.

Philosophical Society in Cambridge:
Proceedings. Vol. VIII, part 4. 1895. 8°.

Museum of comparative zoology in Cambridge, Mass.:
Annual Report for 1893—94. 1894. 8°.
Memoirs. Vol. XVII, No. 3. 1894. 4°.
Bulletin. Vol. XXV, No. 12. Vol. XXVI, No. 1. 2. Vol. XXVII, No. 1. 1894/95. Vol. XVI, No. 15. 1895. 8°.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass.:
49th annual Report 1893—94. 1894. 8°.
Annals. Vol. XXXV. Waterville 1894. Vol. XXXII, part 1. 1895. 4°.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:
Atti. Serie IV, Vol. 7 und Bullettino, fasc. 36—38. 1894. 4°.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:
Herstellung und Untersuchung der Quecksilber-Normalthermometer von J. Pernet, W. Jäger u. E. Gumlich. Berlin 1895. 4°.

Field Columbian Museum in Chicago:
Publications. Vol. I, No. 1. 1894. 8°.

Zeitschrift „The Monist“ in Chicago:
The Monist. Vol. V, No. 2. 3. 1895. 8°.

Zeitschrift „The Open Court“ in Chicago:
The Open Court. No. 382—393. 395—408. 1894/95. 4°.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Chur:
XXIV. Jahresbericht. Jahrg. 1894. 1895. 8°.

Observatory in Cincinnati:
Publications of the Cincinnati Observatory. Nr. 13. 1895. 4°.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1894. No. 102—104. 1895. No. 1—47. fol.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mittheilungen. N. F. Band 2. Jahrgang 1891—94. 1894. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Rep. Argentina):

Boletin. Tom. XII, 2. XIV, 1. Buenos Aires. 1891—94. 8⁰.

Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Sem. 1895. 8⁰.

Historischer Verein in Darmstadt:

Quartalblätter 1894 in 4 Heften. 8⁰.

Verein für Hessische Geschichte in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. N. F. Band II, Heft 1. 1895. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

Proceedings. Vol. IV, 1891—93. 1894. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band VII, Theil 2. 1895. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome XV, 3ᵉ trimestre. Tom. XVI, 4ᵉ trimestre. 1894. 8⁰.

Société astronomique Russe in Dorpat:

Ephémeridis des étoiles pour 1895. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III. Vol. 3, No. 3. 1894. 8⁰.
Cunningham Memoirs. No. 10. 1894. 4⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VI, part 4. 1892. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XX, page 305—384. 1895. 8⁰.

Gymnasium zu Eisenach:

Jahresbericht für 1894/95 nebst Abhandlung von G. Kühn: Regesten zur Geschichte des Gymnasiums. 1895. 4⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 21. 1895. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Ser. IV. Vol. 17, disp. 3. 4. Vol. 18, disp. 1. 1894/95. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria in Florenz:

Documenti di storia italiana. Documenti dell' antica costituzione dell' comune di Firenze, pubbl. da P. Santini. 1895. 4⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Band XVIII, Heft 4. 1895. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 12. Jahrg. No. 7—12. 1894/95. 8⁰.
Societatum Literae, 8. Jahrg. 1894. No. 10—12. 9. Jahrg. 1895. No. 1—3. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Collectanea Friburgensia. Fasc. III. 1895. 4⁰.
Festreden 1894/95. 1895. 8⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. S.-S. 1895. W.-S. 1895/96. 1895. 8⁰.
Autorités professeurs et étudiants. Sem. d'hiver 1894/95. 1894. 8⁰.
Index lectionum. S.-S. 1895. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mittheilungen. N. F. Band V. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1895. No. 1—6. 4⁰.
Nachrichten. Philol.-hist. Classe. 1894. No. 4. 1895. Nr. 1. 2. 8⁰.
" Mathem.-phys. Classe. 1894. No. 4. 1895. No. 1. 8⁰.
Nachrichten u. geschäftliche Mittheilungen. 1895. Heft 1.
Julius Plückers gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Band I. Leipzig 1895. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 70, Heft 2. 1894. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. IV, p. 193—206 u. CLIII—CCXII. Vol. V, p. 1—70 u. I—XXVI. 1894/95. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mittheilungen. 26. Jahrg. 1894. Berlin 1895. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule zu Grimma:

Jahresbericht 1894/95 mit Abhandlung von P. Meyer: Samuel Pufendorf. 1895. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde im Haag:

Bijdragen. V. Reeks. Deel IX. VI. Reeks. Deel I, No. 12. 1894/95. 8⁰.
Naamlijst der leden op 1. Januar 1895. 1895. 8⁰.

Teyler Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II. Vol. 4, partie III. 1894. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Tome 28, livr. 5. Tome 29, livr. 1. 1895. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 30, No. 21—24. Heft 31, No. 1—10. 1894/95. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 48, Heft 4. Band 49, Heft 1. Leipzig 1894/95. 8⁰.

Jahrbuch der Elektrochemie in Halle:

Jahrbuch. 1. Jahrg. Halle 1895. 8⁰.

Universität in Halle:

Das zweihundertjährige Jubiläum der Universität Halle-Wittenberg. Festbericht von D. B. Beyschlag. 1895. 4°.
Verzeichniss der Vorlesungen. Somm.-Sem. 1895. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 67, Heft 5 u. 6. Leipzig 1894/95. 8°.

Thüringisch-sächsischer Verein für Erforschung vaterl. Alterthums in Halle:

Neue Mittheilungen. Band XIX, 1. 1895. 8°.

Verein für Hamburger Geschichte in Hamburg:

Mittheilungen. 16. Jahrg. 1893/94. 1894. 8°.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Band VIII. 1891—93. 1894. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Band XIII. 1895. 4°.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1894. 8°.
Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen. Heft 3. u. 4. 1890—94. fol.

Universität Heidelberg:

Erwin Rohde, Die Religion der Griechen. Rede. 1895. 4°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. V, Heft 1. 1895. 8°.

Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Band V, Heft 3. 1894. 8°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Band XXV, Heft 2. 1895. 8°.

Michigan Mining School in Houghton:

Catalogue of the Michigan Mining School 1892—94. 8°.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Wappenbuch der Städte und Märkte Tirols. 1894. 8.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Band IV, Lieferung 1. Text und Atlas.
Band V, Lieferung 1. Text und Atlas.
Band VIII, Lieferung 1. Text und Atlas. 1893/94. fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band 29, Heft 2. 1894. 8°.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Band 62, 1—6. 1895. 8°.
Medicinische Doctor-Dissertation von P. Dmitriewsky. 1894. 8°.
2 Medicinische Dissertationen von Gratshov und Sergaiev. 1895. 8°.

Kaiserliche Universität in Kharkow:

Sapiski. 1894. No. 4. 1895. No. 1. 2. 8°.
M. Tikhomandritzky, Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques. 1895. 8°.

Ministerial-Commission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungs-Stationen. 1893. Heft 1—12. 1894/95. quer 4⁰.
Wissenschaftliche Meeres-Untersuchungen. N. F. Band I, Heft 1. 1894. 4⁰.

Kais. Universität in Kiew:

Iswestija. 1894. Band 34, No. 11. 12. Band 35, No. 1. 2. 1894/95. 8⁰.
Spisok etc. (Verzeichniss des Personals). 1894. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Jahrbuch. Heft 23. 1895. 8⁰.
Diagramme. 1894. fol.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:

Ertesitö. 3 Hefte. 1894. 8⁰.

Archäologische kroatische Gesellschaft in Knin:

Glasilo. Band I, No. 1. 2. 1895. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Descriptio iconibus illustrata plantarum novarum vel minus cognitarum, autore Joh. Lange. Fasc. I—III. 1864—66. fol.
Oversigt. 1894. No. 3. 1895, No. 1. 1894/95. 8⁰.
Mémoires. 6ᵉ Sér. Section des sciences. Tom. VIII, No. 10. 1894. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke. Band 9, Heft 3. 4. Band 10, Heft 1 und Tillaeg zu Band 9. 1894/95. 8⁰.
Mémoires. Nouv. Sér. 1893. 1894. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Danmarks Kirkeböger. 1895. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1895. Januar—Mai. 8⁰.
Rozprawy filolog. Tom. 20. 21. 23. Rozprawy filozof. Tom. 30. 1894. 8⁰.
Rocznik 1893/94. 8⁰.
Monumenta medii aevi historica. Tom. 14. 1894. 4⁰.
Sprawozdania komisyi jezykowej. Tom. 5. 1894. 8⁰.
Acta rectoralia. Tom. 1, fasc. 3. 1894. 8⁰.
Archiwum komisyi histor. Tom. 7. 1894. 8⁰.
Biblioteka pisarzów polsk. Tom. 29. 1894. 8⁰.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. 15. 1894. 8⁰.
Nic. Hussoviani carmina. 1894. 8⁰.
Atlas geologiczny Galicyi. Heft III. (Text und Atlas.) 1894. fol. Text in 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3ᵉ Série. Vol. 30, No. 115. 116. 1894. 8⁰.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. Deel XIV, 1. 2. 1895. 8⁰.

Sternwarte in Leiden:

Verslag 1893/94. 1894. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil 13, Heft 3. 4. 1894/95. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. Jahrgang 29, Heft 3. 4. Jahrgang 30, Heft 1. 2. 1894/95. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte der math.-phys. Classe. 1894, II. III. 1895, I. 8⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Band XXI, No. 3—6. Band XXII, No. 1. 1895. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. 1894. Heft 2. 8⁰.
Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band XV, 2. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Band 51, Heft 1—11. 1895. 8⁰.

Université catholique in Loewen:

Annuaire 1895. 8⁰.
Thèses. No. 654—670. Faculté de théologie. 1894. 8⁰.
Programme des cours de l'année académique 1894/95. 1894. 8⁰.
J. Muthuon, Arkoses de Lembecq-Clabecq. 1894. 8⁰.
V. de Buck, Mgr. de Ram. Paris 1865. 8⁰.
M. Arendt, Commentaires de Charles V. Bruxelles 1859. 8⁰.
W. A. Arendt, Leo der Grosse. Mainz 1835. 8⁰.
J. J. Thonissen, Vie du comte Ferdinand de Meeus. 1863. 8⁰.
J. J. Thonissen, Vie du comte Félix de Mérode. 1861. 8⁰.
Jansenius, évéque d'Ypres. 1893. 8⁰.
J. B. Laforêt, Orphée. 1850. 8⁰.

Her Majesty's Government in London:

The Voyage of H. M. S. Challenger. A Summary of the scientific Results. Part I a. II. 1895. 4⁰.

R. Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 14, 2. 1895. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. X, No. 37 u. 38. 1895. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 57, No. 340—346. 1895. 8⁰.
Philosophical Transactions. Vol. 185, part 1. A. B. 1895. 4⁰.
List of Membres. 1894. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 55, No. 2—7. 1894/95. 8⁰.

Chemical Society in London:

Proceedings. Session 1894—95. No. 143—158. 8⁰.
Journal. Supplementary Number 1894 und Nr. 386—391. January—June 1895. 8⁰.
Charter and By Laws. 1895. 8⁰.
A List of the Officers and Fellows. 1895. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. No. 197—200. 1894. 8⁰.
List. November 1. 1894. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1894. Part 6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1894, Part IV. 1895, Part I. 1895. 8⁰.
Transactions. Vol. VIII, 10. 1895. 4⁰.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. Vol. 51, No. 1309—1333. 1894/95. 4⁰.

Accademia di scienze in Lucca:

Atti. Tomo 27. 1895. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta. Tom. XXX, 1. 2. 1893/94. 4⁰.

Institut Grand Ducal (Section des sciences naturelles) in Luxemburg:

Publications. Tome 2. 3. 1894. 8⁰.

Verein für Luxemburger Geschichte in Luxemburg:

„Ons Hémecht“. Vereins-Organ. Jahrg. I, No. 3. 1895. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. VII, part 2. 1894. 4⁰.

Government Astronomer in Madras:

Madras Meridian Circle Observations. Vol. VIII. 1894. 4⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. No. 3. 1895. 8⁰.

R. Academia de ciencias in Madrid:

Anuario. 1895. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 26, cuad. 1—6 und Indice general zu Tom. 1—25. 1895. 8⁰.

R. Osservatorio astronomico di Brera in Mailand:

Osservazioni meteorologiche dell' anno 1894. 1894. 4⁰.
Publicazioni. Nr. 38. 1893. fol.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Memorie. Tomo V. 1895. 4⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno XXI, fasc. 4. Anno XXII, fasc. 1. 1894/95. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. IV. Ser. Vol. 8, No. 4. Vol. 9, No. 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1894/95. 4°.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Band III, 4. 1894. 8°.

Zeitschrift Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. Anno I, fasc. 1. 1895. 8°.

Académie in Metz:

Mémoires. Année 1892/93. 1895. 8°.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. VI. Jahrgang 1894. 4°.

Observatorio meteorologico central in Mexico:

Boletin mensuel. 1895. 1—4. 4°.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias. Tomo 8, No. 1—4. 1894. 8°.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie. Tomo 2, No. 5—7. 1893/94. fol.

Natural History Society of Wisconsin in Milwaukee:

Occasional Papers. Vol. II, No. 2. 3. 1894/95. 8°.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Anno 28. Ser. III. Vol. 3, fasc. 1. 1894. 8°.

Bureau d'échanges internationaux de publications de la République de l'Uruguay in Montevideo:

Loi du rayonnement solaire. 1894. 4°.
Annuario estadístico de la República oriental del Uruguay. Año 1893. 1895. 4°.
Estadistica escolar año de 1893. 1894. 4°.
Rasgos biográficos del Señor Don Juan Idiarte Borda, Presidente de la República O. de Uruguay. 1894. 4°.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1894, No. 3. 4. 1894/95. 8°.

Lick Observatory of the University of California in Mount Hamilton:

Publications. Vol. III. 1894. Sacramento. 4°.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 1894, No. 9—12. 1895, No. 1—5. 1895. 4°.

K. Technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Sem. 1895. 8°.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1895. 8°.
Amtsblatt der Erzdiöcese München und Freising. 1895, No. 1—15. 8°.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Das Eisenbahn-Nivellement der K. B. Staatseisenbahnen. 1894. 4⁰.
Geognostische Jahreshefte. VII. Jahrg. 1894. Cassel 1895. 4⁰.

Historischer Verein von Oberbayern in München:

Monatsschrift. 4. Jahrg. 1895, No. 1—6. Januar—Juni. 8⁰.

Akademischer Verlag München:

Hochschul-Nachrichten. No. 50—52. 1894/95. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Band 52 und Ergänzungsheft I, Lief. 2. 1894. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematice in Neapel:

Rendiconto. Serie II. Vol. VIII, fasc. 11. 12. Serie III. Vol. I, fasc. 1—4. 1894/95. gr. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. XI, Heft 4. 1895. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 57. Jahrgang 1893. 8⁰.

Institute of Mining and Mechanical Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 44, part 2. 3. 1895. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

The American Journal. No. 289—294. January—June 1895. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Transactions. Vol. XIII. 1894. 8⁰.
Annals. Vol. VII (Index). Vol. VIII, No. 5. 1895. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. VI. 1894. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. 17, No. 1—7. Easton 1895. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 26, No. 4, part I. II. Vol. XXVII, No. 1. 1894/95. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1894. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrg. 1894. 8⁰.
Katalog der Holzstöcke des XV—XVIII. Jahrh. Theil II. 1894. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XIX, 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Historischer Verein in Osnabrück:

Osnabrücker Geschichtsquellen. Band III. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mittheilungen. Band 19, 1894 u. Register zu Band 1—16. 8⁰.

Società-Veneto-Trentina di scienze naturali in Padova:

Bullettino. Tom. VI, No. 1. 1895. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. IX, fasc. 1. 2. 1895. 8⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1894, No. 52. 1895, No. 1—25. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 119, No. 26. 27. Tome 120, No. 1–25. 1894/95. 4⁰.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 637—642. Janvier—Juin 1895. 4⁰.

Museum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1895, No. 2. 3. 8⁰.

Société géographique in Paris:

Bulletin. 7e Sér., Tome 15, Tome 16. 1894, 3e et 4e trim. 1895, 1er trim. 8⁰.
Comptes rendus. 1894, No. 18. 19. 1895, No. 1—8. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 22, No. 9. 10. Tome 23, No. 1—3. 1894/95. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome 19. 1894. 8⁰.
Mémoires. Tome VII, part 1—4. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:

L'Électricien. Tom. VIII, No. 209. 1894. 4⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. 5e Série. Vol. I, No. 4. Vol. II, No. 1—4. 1894/95. 4⁰.
Alex. Veselovsky, Boccaccio. Tom. II. 1894. 8⁰.
Mémoires. Tom. 42, No. 12. 1894. 4⁰.
Βυζαντινὰ χρονικά. Tom. I, Nr. 2—4. 1894. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XIII, 2. 1894. 8⁰.

Kais. russ. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Band XXXI. 1894. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXVI, No. 8. 9. Tom. XXVII, No. 1–3. 1894/95. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1893, Theil I. II. 1894. 4⁰.
Repertorium für Meteorologie. Supplem.-Band VI u. Band XVII. 1894. 4⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Gotitschnyact (Jahresact), 8. Februar 1895. 8⁰.
P. M. Melioranski, Kurze Grammatik der Kosak-Kirgisischen Sprache. Theil I. (In russ. Sprache.) 1894. 8⁰.
Jos. Kurono, Russisch-japanische Gespräche. (In russ. Sprache.) 1894. 4⁰.
Bestimmungen für die Benützung der K. Universitäts-Bibliothek. (In russ. Sprache.) 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1894, part II. III. 8⁰.
Journal. Second Series. Vol. X, part 2. 1894. fol.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. XLII. annual Meeting at Asheville. Sept. 1894. Baltimore 1894. 8⁰.

Geographical Club in Philadelphia:

Bulletin. Vol. I, No. 3—5. 1894/95. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 18, No. 2—4. 1894/95. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 32, No. 143. Vol. 33, No. 146. 1893/94. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 133—241. 1894/95. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für 1894/95 mit Abhandlung: Lucianstudien von Joh. Rentsch. 1895. 4⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 7. Jahrg., Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Central-Bureau des meteorologischen Instituts in Potsdam:

Verhandlungen der 1894 in Innsbruck abgehaltenen Conferenz der Permanenten Commission der Internationalen Erdmessung. Berlin 1895. 4⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmungen in den Jahren 1890—93. 1895. 4⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band VII, 2 und X. 1895. 4⁰.

Kaiser Franz-Josef Akademie in Prag:

Rozpravy. Třída I. Ročník 3, číslo 3. 4. Třída III. Ročník 3, číslo 3. 1894. gr. 4⁰.
Věstník. Ročník 3, číslo 7—9. 1894. gr. 8⁰.
Almanach. Ročník 5. 1895. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen in Prag:

Rechenschaftsbericht vom 15. Dezember 1894 und Mittheilung No. III u. IV. 1895. 8⁰.
Eugen Holzner, Studien zu Euripides. Wien 1895. 8⁰.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Band II. Nik. Hermann. Wien 1895. 8⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.

Jahresbericht für das Jahr 1894. 1895. 8⁰.
Sitzungsberichte 1894. a) Classe für Philosophie.
b) Mathem.-naturw. Classe. 1895. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1894. 1895. 8⁰.

K. Böhmisches Museum in Prag:

Časopis. Jahrg. 1894. 4 Hefte. 1894. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1894. 55. Jahrg. 1895. 4⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rectors für das Jahr 1894/95. 1894. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Sem. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. 33. Jahrg., No. 1—4. 1894. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Correspondenzblatt. Nr. 37. 1894. 8⁰.
Festschrift aus Anlass seines 50 jährigen Bestehens. 1895. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario 1894. 1893. 8⁰.

„Limburg“ Provinciaal Genootschap voor geschiedkundige Wetenschappen in Roermond:

Limburg's Jaarboeck I. 1894. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1895. 8⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. II, parte 2. Notizie degli scavi, Sett.—Dic. e Indice 1894. Vol. III, p. 2. Gennaio—Marzo 1895. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. III, fasc. 10—12. Vol. IV, fasc. 1—3. 1894/95. 8⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. III. Semestre 2, fasc. 9—12. Vol. IV. Semestre 1, fasc. 1—11. 1894/95. 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 45, sess. 7. Anno 47, sess. 4. 1894. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1894, No. 4. 1895, No. 1. 8°.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Band IX, No. 4. gr. 8°.

Ministero di agricultura, industria e commercio in Rom:

Statistica delle Biblioteche. 2 voll. 1893/94. 4°.

Office centrale meteorologico in Rom:

Annali. Vol. XII, parte 2. 1890. 1895. 4°.

Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XVII, fasc. 3. 4. 1894. 8°.

Accademia degli Agiati in Rovereto:

Atti. Anno XII. 1894. Serie III. Vol. I, fasc. 1. 1895. 8°.

American Association for the avancement of sciences in Salem:

Proceedings, held at Madison, Wisconsin. August 1893. 1894. 8°.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1892/93. 1894. 8°.
Joachim Vatian von Emil Arbenz. 1895. 4°.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. II^d Series. Vol. IV, part 1. 1894. 8°.

Observatorio astronómico meteorológico in San Salvator:

Annuario 1895. fol.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino. Anno 18, No. 1—5. 1895. 8°.

Museum in Stavangen:

Aarsberetning for 1893. 1894. 8°.

Gesellschaft für Pommer'sche Geschichte in Stettin:

Die Bau- und Kunstdenkmäler des Reg.-Bezirks Köslin. Band II, Heft 1. 1894. gr. 8°.
Baltische Studien. Jahrg. 24. 1894. 8°.

K. Vitterhets, Historie och Antiquitets-Akademie in Stockholm:

Handlingar. Del 31. 32. 1893. 8°.
Antiquarisk Tidskrift. XIII, 1. XIV, 3. XV, 2. 1894/95. 8°.

Schwedens öffentliche Bibliotheken in Stockholm:

Accessions-Katalog. IX, 1894. 1895. 8°.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Band 28, fasc. 8—10, 1894. Band 29, Heft 1—5, 1895. 8°.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tome 28, No. 7. 1894. 8°.

K. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik u. Landeskunde. Jahrg. 1894, Heft 1—3. 1895. 4°.

K. öffentliche Bibliothek in Stuttgart:

Wirtembergisches Urkundenbuch. Band VI. 1894. 4⁰.
Hermann Fischer, Geographie der schwäbischen Mundart, Text und Atlas. Tübingen 1895. fol.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württembergische Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. Jahrg. III, 1894, Heft 1—4. 1894/95. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture in Sydney:

Palaeontology. No. 8, part III. 1895. 4⁰.
Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. IV, part 3. 1895. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletin. Tom. I, No. 20. 21. Mexico 1895. 4⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen. Jahrgang 1892. 1894. fol.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Mittheilungen. 55. Heft. 1895. fol.

Imperial University in Tokio:

Calendar 1893/94. 8⁰.
The Journal of the College of Science. Vol. VII, 2—4. 1894/95. 4⁰.

Medicinische Facultät der Universität Tokio:

Mittheilungen. Band II, No. 2. Bd. III, No. 1. 1894. 4⁰.

Museo civico di storia naturale in Triest:

Atti. Vol. IX. 1895. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. XXX, disp. 1—11. 1894/95. 8⁰.
Osservazioni meteorologiche dell' anno 1894. 1895. 8⁰.

Humanistika Vetenkaposamfund in Upsala:

Skrifter. Band II. 1892—94. 8⁰.

Universität Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. 26, Année 1894. 1894/95. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. XV. Deel. s'Gravenhage 1894. 8⁰.
Werken. Ser. III, Deel 5. s'Gravenhage 1894. 8⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1894. 8⁰.
Verslag. 1894. 8⁰.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Ser. XVI, Vol. 1. 2. XVII, Vol. 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Istituto Veneto di scienze, lettere e arti in Venedig:

Atti. Tom. 50, disp. 4—10, u. 2 Appendices. Tom. 51, Nr. 1—10. Tom. 52, No. 1—3. 1891—94. 8⁰.
Temi di premio dal 19, Maggio 1895. 8⁰.

Bureau of Education in Washington:

Annual Report of the Commissioner of Education for 1891/92. 2 Voll. 1894. 8⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

XI. Annual Report for 1889/90. XII. Annual Report for 1890/91. 1894. 4⁰.
Contributions to North American Ethnology. Vol. IX. 1893. 4⁰.
An ancient Quarry in Indian Territory, by W. H. Holmes. 1894. 8⁰.
List of the Publications of the Bureau of Ethnology. 1894. 8⁰.

N. S. Departement of Agriculture in Washington:

North American Fauna. No. 8. 1895. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Smithsonian Report. U. S. National-Museum 1891. 1892. 1892/93. 8⁰.
Annual Report. July 1893. 1894. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 854. 969. 970. 1894. 8⁰.
Diary of a Journey through Mongolia and Tibet in 1891 and 1892 by William Woodville Rockhill. 1894. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Observations made during the year 1889. 1893. 4⁰.
The Elements of the four inner planets and the fundamental constants of Astronomy by Simon Newcomb. 1895. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Annual Report for 1892. Part II. 1894. 8⁰.
Bulletin. No. 31—33. 1894/95. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

XII. annual Report in 2 parts. XIII. in 3 parts. 1891/92. 4⁰.
Monographs. No. XIX. XXI. XXII. 1893. 4⁰.
Mineral Resources. 1892. 1893. 1894. 8⁰.
Bulletin. No. 97—117. 1893/94. 8⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. Jahrg. 28, Heft 1. 1895. 8⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Band 130. 1894. 8⁰.
Mathem.-naturwissensch. Classe. 1893/94. 8⁰.
Abth. I. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—3.
„ II. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—5.
„ IIb. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—3.
„ III. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—4.
Denkschriften. Philos.-hist. Classe. Band 43.
Mathem.-naturw. Classe. Band 60. 1894. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Band 80, 2. Band 81, 1. 1894. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1894, No. 10—18. 1895, 1—7. 4⁰.
Jahrbuch. Jahrg. 1894. Band 44, Heft 2—4. 4⁰.

K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:

Astronomische Arbeiten. VI. Band. Längenbestimmungen. 1894. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. VIII. Jahrg. 1895, No. 1—26. 1895. 4⁰.
Ernst Ludwig, Schwefelbad Ilidze bei Sarajevo in Bosnien. 1895. 8⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 24, Heft 6. Band 25, Heft 1. 1894/95. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 37. 1894. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 44, Jahrg. 1894, III. u. IV. Quartal. Band 45, Jahrg. 1895, Heft 1—5. 1895. 8⁰.

K. K. Reichs-Kriegs-Ministerium „Marine-Section" in Wien:

Relative Schwerbestimmungen durch Pendelbeobachtungen. 1895. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band IX, No. 3. 4. Band X, No. 1. 1894/95. 4⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Band XXVIII, No. 2—7. Band XXIX, No. 1. 1894/95. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1894, No. 5—10. 1895, No. 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Band 36 und Ergänzungsheft. 1893/94. 8⁰.
Jahresbericht für 1892 u. 1893. 1893 u. 1894. 8⁰.
Dr. Th. Henner, Der historische Verein von Unterfranken in seinem 60 jährigen Wirken. 1893. 8⁰.
Ansicht von Würzburg im Jahre 1648 aus Merian's Topographia Franconiae 1650.

Schweizerische Meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen 1892. Jahrg. 29. 1894. 4⁰.

Schweizerische geologische Commission in Zürich:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lief. 33. 34. 1893/94. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band XXIII, 7. XXIV, 1. 1895. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 39, Heft 3. 4. Jahrg. 40, Heft 1. 1894/95. 8⁰.

Universität Zürich:

Schriften der Universität vom 1. Mai 1894 bis 1. Mai 1895. 4⁰ u. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Le Prince Albert Ier de Monaco:

Sur les premières campagnes scientifiques de „Princesse Alice". Paris 1895. 4⁰.

Sur la densité et l'alcalinité des eaux de l'Atlantique par M. J.-Y. Buchanan. Paris 1895. 4⁰.

J. P. Alibert in Paris:

Notes sur ses découvertes et ses travaux. 1895. 4⁰.

Francesco Brioschi in Rom:

Notizie sulla vita e sulle opere di Arturo Cayley. 1895. 4⁰.

V. Fusböll in Kopenhagen:

Vœgter-Versene. 1894. 8⁰.

M. P. Foucart in Athen:

Recherches sur l'origine et la nature des mystères d'Éleusis. Paris 1895. 8⁰.

Aristote, constitution d'Athènes, notes sur la seconde partie. Paris 1895. 8⁰.

C. Remigius Fresenius in Wiesbaden:

Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse. 16. Aufl. 1895. 8⁰.

Dr. Gerling in Elmshorn (Holstein):

Ein Ausflug nach den ostholsteinischen Seen. Halle 1893. 8⁰.

Emil Heuser in Landau (Pfalz):

Katalog des städtischen Museums in Landau i. d. Pfalz. 1895. 8⁰.

Friedrich Hirth in Tschung-King (China):

Die Länder des Islâm nach chinesischen Quellen. I. Leiden 1894. 8⁰.

Ueber den Schriftenverkehr von Kinsay zu Marco Poló's Zeit. Leiden 1895. 8⁰.

Das Reich Malabar nach Chao-Ju-Kua. Leiden 1895. 8⁰.

Wilhelm His in Leipzig:

Die anatomische Nomenclatur. Sep.-Abdruck. 1895. 8⁰.

Charles Janet in Beauvais:

Études sur les fournis. Note IV, V et VI (mit 4 weiteren geologischen Abhandlungen). Paris 1894. 4⁰ u. 8⁰.

Alfred Jörgensen in Kopenhagen:

Der Ursprung der Weinhefen. Jena 1895. 8⁰.

Albert von Kölliker in Würzburg:

Kritik der Hypothesen über amöboide Bewegungen der Neurodendren. 1895. 8⁰.

Nicolaos Krispi in Athen:

Νέα θεωρία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. 1895. 8⁰.

Otto Kuntze in Friedenau bei Berlin:

Geogenetische Beiträge. Leipzig 1895. 8⁰.

August Kurz in Augsburg:

Der Bunsenbrenner (Ausschnitt). 1894. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

Philosophical Sin. 1895. 8⁰.

Gabriel Monod in Paris:

Revue historique. XX. Année. Tome 57, No. 1. 2. Tome 58, No. 1. Paris 1895. 8⁰.

Emil Pallioppi in Pontresina:

Dizionari dels itioms romauntschs. Fasc. IV. 1895. 8⁰.

Michele Rajna in Mailand:

Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano 1895. 8⁰.

Dietrich Reimer, geogr. Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. Jahrg. I, Heft 1—3. 1895. 4⁰.

Albert Sorel in Paris:

Notice sur M. Fustel de Coulanges par M. Albert Sorel. 1893. 4⁰.
Discours pour la réception de M. Albert Sorel. 1890. 4⁰.

Arturo Soria y Mata in Madrid:

Orígen poliédrico de las espacies. 1894. 8⁰.

M. A. Stein in Lahore:

Catalogue of the Sanskrit manuscripts in the Library of the Maharaja of Jammu and Kashmir. Bombay 1894. 4⁰.

Michele Stossich in Triest:

Notizie elmitologiche. 1895. 8⁰.
I distomi dei rettili. 1895. 8⁰.
Osservazioni sul Solenophorus megalocephalus. 1895. 8⁰.
Il genere Ankylostomum Dubini. 1895. 8⁰.

August Tischner in Leipzig:

Le phénomène fondamental du système solaire. 1895. 8⁰.

G. Tschermak in Wien:

Ueber gewundene Bergkrystalle. 1894. 4⁰.

G. Tropea in Messina:

Storia dei Lucani. 1894. 8⁰.

Girolamo Vitelli in Florenz:

Studi italiani. Vol. III. 1895. 8⁰.

Gauthier Villars et fils in Paris:

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. I. Série. Fiches à 100. 1894. 8⁰.

Henry Wilde in Manchester:

On the Multiple Proportions of the Atomic Weights of Elementary Substances in relation to the unit of Hydrogen. 1895. 8⁰.
On the Evidence afforded by Bode's Law of a permanent Contraction of the Radii Vectores of the Planetary Orbits. 1895. 8⁰.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. November 1895.

1. Herr L. Radlkofer legt eine Monographie der Sapindaceen-Gattung Paullinia vor. Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

2. Herr K. Goebel macht eine Mittheilung: „Ueber die Abhängigkeit der Blattformen von Campanula rotundifolia von der Lichtintensität."

3. Herr Alf. Pringsheim spricht: „Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen."

Ueber die Abhängigkeit der Blattform von Campanula rotundifolia von der Lichtintensität.

Von K. Goebel.

(Eingelaufen 7. November.)

In meinen „Pflanzenbiologischen Schilderungen“ (II. Theil, S. 294, 1893) habe ich darauf hingewiesen, dass die bekannte Heterophyllie von Sagittaria sagittifolia insoferne von der Lichtintensität beeinflusst werde, als bei schwachem Lichte nur die bandförmigen Blätter auftreten, während zur Bildung der pfeilförmigen, über den Wasserspiegel sich erhebenden, höhere Lichtintensität erforderlich ist. Weitere Versuche (mitgetheilt in Science progress, Vol. I, Nr. 2, und Flora, 80. Bd. (1895) p. 96 ff. bestätigten diese Auffassung.

In der letztgenannten Zeitschrift habe ich auch die später erfolgten Veröffentlichungen von Klebs und Vöchting und den Einfluss der Lichtintensität auf die Organbildung einiger Kakteen besprochen. Aus den dort gleichfalls erwähnten Untersuchungen, die einer meiner Schüler in meinem Laboratorium ausführte, ergab sich ferner, dass auch bei dem Keimungsprocesse einiger Lebermoose die Gestaltung der Keimpflanze durch die Lichtintensität bedingt ist. Bei Preissia commutata z. B. entsteht bei schwacher Beleuchtung nur ein fadenförmiger Keimschlauch, der bei starker Lichtintensität sich zur Zellfläche verbreitert; diese kann bei schwacher Lichtintensität wieder veranlasst werden, als Keimschlauch weiter zu wachsen.

Da die Untersuchung der Abhängigkeit der Organbildung von äusseren Faktoren von grosser Bedeutung für ein kausales Verständniss der so verwickelten vegetabilischen Gestaltungsprocesse ist, so habe ich bei den höheren Pflanzen nach weiteren Fällen gesucht, in denen eine solche Abhängigkeit sich nachweisen lässt.

Viele Phanerogamen zeigen die Erscheinung der Heterophyllie, d. h. sie bringen im Verlaufe ihrer Entwickelung verschieden gestaltete Blätter hervor. Dass diese Heterophyllie nicht eine erblich fixirte, sondern eine durch innere oder äussere Einflüsse bedingte ist, konnte ich, auch abgesehen von dem oben angeführten Falle von Sagittaria, früher in einigen anderen Beispielen nachweisen.

Die Keimpflanze von Vicia Faba z. B. bringt zunächst sehr einfach gestaltete, sogenannte Primärblätter hervor, schuppenartige Gebilde, die sich von den später auftretenden Laubblättern beträchtlich unterscheiden. Es zeigte sich, dass dieselben Hemmungsbildungen von Laubblättern sind, welche zu Stande kommen durch Correlationserscheinungen.[1]) Man kann demgemäss die Bildung dieser schuppenförmigen Primärblätter unterdrücken und die Pflanze nöthigen, statt ihrer Laubblätter, oder Zwischenbildungen zwischen diesen und den Primärblättern hervorzubringen.

Ein anderes Beispiel liefert eine neuseeländische Veronica-Art (V. cupressoides). Dieselbe gleicht, wie der Artnamen besagt, durch ihre schuppenförmigen, der Sprossoberfläche anliegenden Blätter einer Cupressinee. Die Verringerung der Blattgrösse ist hier eine Anpassung an trockenes Klima. Die Keimpflanzen dagegen besitzen zunächst flache, abstehende, denen anderer Veronica-Arten gleichende Blätter. Es gelang, die Pflanzen durch Kultur in feuchtem Raume zur Aenderung ihrer Blattform zu bringen (Pfl.-biol. Schilderungen I, S. 20),

[1]) Vgl. Ueber die Jugendzustände der Pflanzen, Flora 1889.

überhaupt begünstigt jeder äussere Faktor, welcher von den normalen Lebensbedingungen der Pflanze abweicht, die Rückkehr zur Jugendblattform. Eine solche Rückkehr, also einen Rückschlag zu erzielen, gelang auch bei Heteranthera reniformis. Es ist dies eine monokotyle Sumpfpflanze, welche mit langgestielten, nierenförmigen Blättern versehen ist. Die Keimpflanzen aber bringen, wie die von Sagittaria, zunächst ungegliederte, bandförmige Blätter hervor.

Keimpflanzen, welche schon nierenförmige Blätter hervorgebracht hatten, wurden in Sand bei schwacher Beleuchtung kultivirt. Bei einigen derselben, die schwach wuchsen, gelang es, sie zur Rückkehr zur Bildung der bandförmigen Primärblätter zu nöthigen. Dies kommt in der Natur, soweit bis jetzt Beobachtungen vorliegen, nie vor. Wohl aber habe ich bei einer anderen Pontederiacee, bei Eichhornia azurea, einen derartigen, an Seitensprossen auftretenden Rückschlag früher constatiren können (Schilderungen II, S. 288). Ob die verminderte Lichtintensität bei Heteranthera reniformis die Ursache des Rückschlags war, muss ich dahingestellt sein lassen, da das Material ein zu dürftiges war, und wie oben erwähnt, alle die Vegetation ungünstig beeinflussenden Faktoren das Auftreten von Rückschlagsbildungen begünstigen.

Ganz klar und unzweideutig aber waren die Ergebnisse bei einer dikotylen Pflanze, der Campanula rotundifolia.

Fassen wir einen blühenden Spross derselben in das Auge, so zeigt derselbe die Erscheinung der Heterophyllie darin, dass er beginnt mit der Bildung gestielter Blätter mit rundlicher Blattspreite, die vom Stiele deutlich abgesetzt ist. Diese Blätter stehen an der Basis, sie gehen oft so zeitig zu Grunde, dass sie zur Zeit der Blüthenentfaltung nicht mehr nachweisbar sind. Nach oben hin folgen auf diese Blätter solche von ganz anderer Gestalt, sie sind lanzettlich, ohne Differenz von Stiel und Spreite. Meist

fanden sich zwischen beiden Blattformen ganz allmähliche Uebergänge.

Es zeigte sich nun, dass das Auftreten dieser verschieden geformten Blätter nicht in der Natur der Pflanze unabänderlich begründet, sondern von äusseren Bedingungen, speciell von der Lichtintensität abhängig ist. Dies wurde nachgewiesen durch Kulturen, die in verschiedener Entfernung von einem Südfenster aufgestellt waren, so dass sie alle verschieden starke Beleuchtung empfingen. Es wurden zu den Kulturen in abgeschwächtem Lichte Pflanzen verschiedener Entwickelung gewählt. Dabei zeigte sich Folgendes:

1. Sprosse, die nur die Rundblätter gebildet hatten, fuhren während der ganzen Versuchsdauer fort, solche zu bilden, sie gelangten also nicht zur Bildung der Langblätter, sondern wurden, ebenso wie dies früher bei Sagittaria veranlasst werden konnte, auf dem Stadium der Jugendblattform (dem der Primärblätter) zurückgehalten. Wurden derartige Pflanzen direkt an das Fenster gestellt, so entwickelten sie nach einem Monat Langblätter von ganz anderer Form und Blüthen.

2. Haben die bei gemindertem Lichtzutritt kultivirten Pflanzen an ihrem Ende schon eine Blüthenknospe angelegt, so ist damit das Wachsthum der betreffenden Sprosse natürlich abgeschlossen. Aber als Seitensprosse entwickeln sich dann vielfach Triebe, welche Rundblätter tragen.

3. Sprosse, welche zwar schon Langblätter, aber keine Blüthenknospen angelegt haben, können bei geminderter Lichtintensität veranlasst werden, an der Spitze wieder Rundblätter zu bilden. Damit ist die normale Blattfolge durch die Kulturbedingungen vollständig umgekehrt.

Die Abhängigkeit des Auftretens der beiden, so sehr verschiedenen Blattformen von der Lichtintensität ist damit hinreichend bewiesen: die Rundblätter treten bei schwacher,

die Langblätter bei stärkerer Beleuchtung auf. Erstere sind auch für Standorte von geminderter Lichtintensität, wie sie die Keimpflanze z. B. an einem von andern Pflanzen beschatteten Standort vorfindet, besonders geeignet, denn sie besitzen in ihrem, seine Wachsthumsfähigkeit lange beibehaltenden Blattstiele ein Organ, das geeignet ist, die Blattspreite in die günstige Lichtlage zu bringen. Bei den ohnehin durch die Verlängerung der Sprossreste über die Umgebung emporgehobenen Langblättern ist eine solche Einrichtung überflüssig, während die Schmalheit der Blattspenite sie gegen schädigende Einflüsse von Wind, Regen etc. widerstandsfähiger macht.

Die Frage, ob die Bildung der Rundblätter bei einer Keimpflanze unterdrückt werden könne (wobei dieselbe also sofort Langblätter hervorbringen würde), wenn die Keimpflanze von Anfang an starker Beleuchtung ausgesetzt wird, wurde in verneinendem Sinne entschieden. Trotz Anwendung einer sehr starken Lichtquelle (zweier Bogenlampen zu je 2000 Normalkerzen Lichtstärke) bildeten die Keimpflanzen zunächst auch Rundblätter. Dabei ist hervorzuheben, dass es sich nicht etwa nur um Entfaltung von im Samen schon vorhandenen Anlagen von Rundblättern handelte. Dieselben wurden vielmehr, wie die entwicklungsgeschichtliche Untersuchung lehrte, thatsächlich bei der Keimung neu gebildet. Dieses erste Auftreten ist also erblich fixirt.

Ueber die Fortsetzung dieser Untersuchungen hoffe ich später berichten zu können.

Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 8. November.)

§ 1.

Es sei $\sum A_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius $|x| = 1$. Setzt man alsdann zunächst für $|x| < 1$:

$$(1) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu = f(x),$$

so mag $f(x)$ für die Stellen $x = e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen durch unmittelbare analytische Fortsetzung und für etwaige singuläre Stellen $e^{\vartheta' i}$ als $\lim\limits_{\vartheta = \vartheta'} f(e^{\vartheta i})$ definirt sein, bezw. da, wo dieser Grenzwerth nicht existirt, als undefinirt gelten.

Convergirt nun die Reihe $\sum A_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ noch durchweg oder wenigstens im allgemeinen (das soll hier und im folgenden stets bedeuten: mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen), so ist für alle Convergenzstellen nach einem bekannten Abel'schen Satze:

$$(2) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu e^{\nu \vartheta i}$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu \vartheta + i \cdot \sin \nu \vartheta).$$

Andererseits ist $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen mit Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen ϑ' eine nicht nur stetige, sondern unbeschränkt differenzirbare Function der reellen Veränderlichen ϑ. Unter Hinzufügung der weiteren Annahme, dass jene singulären Stellen ϑ' die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ nicht alteriren sollen, muss sich daher $f(e^{\vartheta i})$ in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lassen:

$$(3) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\, d\lambda$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i}) \cos\nu\lambda \cdot d\lambda \cdot \cos\nu\vartheta + \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i}) \sin\nu\lambda \cdot d\lambda \cdot \sin\nu\vartheta \right\}$$

Alsdann folgt aber aus einem bekannten Satze, dass die Coefficienten dieser Entwickelung keine anderen sein können, als die oben mit A_ν bezeichneten. Mit anderen Worten: Allemal wenn die *Potenzreihe* $\sum A_\nu x^\nu = f(x)$ für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen *convergirt* und $f(e^{\vartheta i})$ als *integrable* Function von ϑ definirt, so ist sie *identisch* mit der *Fourier*'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$.

Von den drei Voraussetzungen, unter welchen dieses Resultat hier ausgesprochen wurde, nämlich:

1) der endlichen Anzahl der singulären Stellen von $f(e^{\vartheta i})$,

2) der durchgängigen Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$,

3) der Convergenz von $\sum a_\nu e^{\nu\vartheta i}$, —

lässt sich die erste ohne weiteres beseitigen, wie die Untersuchungen von Du Bois Reymond über die Darstellbarkeit einer beliebigen trigonometrischen Reihe als Fourier'sche Reihe lehren,[1]) sofern nur die Voraussetzungen 2) und 3)

[1]) „Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe etc." Abh. der Bayer. Akademie, Bd. XII (1875). Vgl. insbesondere p. 43.

bestehen bleiben. Da indessen die besonderen Eigenthümlichkeiten, von welchen hier gesprochen werden soll, schon bei Functionen mit einer endlichen Anzahl von Singularitäten zum Vorschein kommen, so soll im folgenden immer nur von solchen die Rede sein.

Auch die zweite Voraussetzung kann man bis zu einem gewissen Grade fallen lassen. Wie nämlich Riemann gezeigt hat,[1]) schliesst das Auftreten gewisser Unendlichkeitsstellen, welche die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben, dennoch die Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe nicht aus. Es sind das solche Stellen ϑ', für welche $f(e^{\vartheta i})$ ohne Maxima und Minima von niederer Ordnung als der ersten unendlich wird (NB. wenn auch nicht von hinlänglich niedrigerer Ordnung, um die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ zu sichern) und für welche $f(e^{(\vartheta'+\vartheta)i}) + f(e^{(\vartheta'-\vartheta)i})$ integrabel ist. Freilich werden in diesem Falle die Integrale, welche die Coefficienten in der Fourier'schen Form darzustellen hätten, in dem gemeinhin üblichen Sinne divergent. Sie behalten jedoch ihre richtige Bedeutung, wenn man ihre Hauptwerthe im Cauchy'schen Sinne nimmt, d. h. wenn man setzt:

$$\int_a^b \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_a^{\vartheta'-\varepsilon} \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta + \int_{\vartheta'+\varepsilon}^b \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta \right\}.$$

Und mit Hinzufügung dieser Modification bleibt, wie Du Bois Reymond gezeigt hat,[2]) die Eindeutigkeit der Coefficienten-Bestimmung, also die Identität zwischen trigonometrischer beziehungsweise Potenz-Reihe einerseits und Fourier'scher Reihe andererseits bestehen. Ich möchte derartige Reihen als uneigentliche Fourier'sche Reihen

---

[1]) „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", Art. 12. (Ges. Werke, p. 244, 245.)

[2]) a. a. O. Art. 24, p. 37 ff.

bezeichnen und benütze diese Gelegenheit, um ein einfaches Beispiel einer solchen Reihe mitzutheilen (s. § 5 dieses Aufsatzes), bei welcher die Convergenz durch ganz elementare Rechnung direct erwiesen werden kann, während die Divergenz der Coefficienten in der Fourier'schen Integralform ohne weiteres aus der Form der zu entwickelnden Function hervorgeht.

Im übrigen bleibt hier noch die Frage offen, ob die durch die convergente Reihe $\sum A_\nu e^{\nu \vartheta i}$ dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ nicht auch solche Singularitäten besitzen könnte, welche, ohne zu der eben betrachteten Kategorie zu gehören, die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben und damit die Darstellbarkeit der Reihen-Coefficienten in der Fourier'schen Form unmöglich machen würden? Ob dieser Fall in Wirklichkeit eintreten kann, muss vorläufig dahingestellt bleiben: das Gegentheil ist wenigstens, so viel ich weiss, bisher nicht bewiesen worden. —

Was nun endlich jene dritte — die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu \vartheta i}$ verlangende — Voraussetzung betrifft, so dürfte man vielfach der Ansicht begegnen, dass man dieselbe ohne weiteres fallen lassen könne, sobald nur die Entwickelbarkeit von $f(e^{\vartheta i})$ in eine convergente Fourier'sche Reihe feststeht, und dass man geradezu aus der Existenz dieser letzteren auf die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu \vartheta i}$ (und damit eo ipso auf die Identität der betreffenden beiden Reihen) schliessen dürfe. So sagt z. B. Herr Darboux in seinem „Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres etc.“ ganz ausdrücklich[1]): „Nous voyons que, si $f(z)$, considérée comme fonction de l'argument ω de z sur le cercle de convergence, est dé-

[1]) Journal de Mathém. 3ième Série, T. IV, p. 13.

veloppable en série trigonométrique,[1]) la série qui développe $f(z)$ suivant les puissances de z demeurera encore convergente sur le cercle limite." Dieser Ausspruch stammt zwar schon aus dem Jahre 1878, d. h. indessen immerhin aus einer Zeit, in welcher die in den Arbeiten der Herren Christoffel[2]), Prym[3]) und Schwarz[4]) (1871/72) zu Tage tretende schärfere Prüfung der Grundlagen des sog. Dirichlet'schen Principes bereits gegründete Bedenken gegen die Stichhaltigkeit der obigen Behauptung hervorrufen konnte. Im übrigen glaube ich, dass auch heute noch viele Mathematiker jene Darboux'sche Ansicht theilen und die Frage nach der Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise schlechthin mit derjenigen nach der Entwickelbarkeit der betreffenden Randfunction in eine Fourier'sche Reihe identificiren. Eine strengere Behandlung dieser Frage ist mir nur in den Arbeiten des Herrn Thomé über lineare Differentialgleichungen[5]) und einer daran anknüpfenden Abhandlung „Ueber Convergenz und Divergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise" [6]) begegnet. Hier wird vor allem bewiesen, dass unter den über die Natur der singulären Stellen

---

1) Hierunter ist immer, wie aus dem ganzen Zusammenhange unzweideutig hervorgeht, eine Fourier'sche Reihe zu verstehen.

2) Ueber die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1871, p. 435.

3) Zur Integration der Differential-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 73, p. 360.

4) Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 74, p. 218.

5) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen — Journ. f. Math. Bd. 91, p. 222 ff. s. besonders Art. 4, 9, 10. —. Desgl. Bd. 95, p. 44 ff. s. Art. 8.

6) Journ. f. Math. Bd. 100, p. 167.

gemachten Voraussetzungen die Coefficienten der Potenzreihe wirklich identisch sind mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten der Randfunction, und sodann erst aus der Convergenz dieser Fourier'schen Reihe auf diejenige der (auf dem Convergenzkreise mit ihr identischen) Potenzreihe geschlossen. Obschon nun aus dieser Art der Beweisführung die Meinung des Verfassers deutlich hervorgeht, dass es Fälle geben könnte, in denen die fragliche Schlussweise nicht zutrifft, so ist es doch weder hier, noch auch, so viel ich weiss, in anderen Arbeiten, deren Gegenstand dies nahe gelegt hätte,[1]) direct ausgesprochen worden, dass es derartige Fälle — und zwar solche von verhältnissmässig einfacher Natur — wirklich auch giebt. Ich will nun in diesem Aufsatze zeigen:

Es giebt thatsächlich Potenzreihen, welche auf ihrem Convergenzkreise *divergiren*, obschon die zugehörige Randfunction in eine convergente *Fourier'*sche Reihe entwickelt werden kann.

In den folgenden beiden Paragraphen theile ich zunächst die allgemeinen Ueberlegungen mit, welche mich zur Construction derartiger Functionen geführt haben und die sodann in § 4 zur Bildung bestimmter Beispiele benützt werden sollen.

§ 2.

Es seien die beiden Reihen:

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(\vartheta) = \sum_0^\infty{}^{\nu} (a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta) \\ \psi(\vartheta) = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-b_\nu \cos \nu\vartheta + a_\nu \sin \nu\vartheta) \end{cases}$$

[1]) z. B. Harnack, Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. — Math. Ann. Bd. 21, p. 305.

für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ durchweg oder wenigstens im allgemeinen convergent; dabei sollen die Coefficienten a_ν, b_ν reelle Grössen von der Beschaffenheit sein, dass für $\nu = \infty$ der Grenzwerth bezw. die obere Unbestimmtheitsgrenze von mindestens einer der beiden Grössen $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$, $|b_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ den Werth 1 hat, während der entsprechende Werth für die andere dieser Grössen auch < 1 sein darf. Setzt man sodann:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu + b_\nu i) \cdot x^{-\nu} = f_1(x),$$

so convergirt diese Reihe für $|x| > 1$, sie divergirt für $|x| < 1$, während sie für $|x| = 1$ übergeht in:

$$(3) \qquad \begin{aligned} f_1(e^{\vartheta i}) &= \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu + b_\nu i)(\cos \nu\vartheta - i \cdot \sin \nu\vartheta) \\ &= \varphi(\vartheta) - i \cdot \psi(\vartheta) \end{aligned}$$

also in Folge der gemachten Voraussetzung auf dem Convergenzkreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt.

Angenommen nun, $f_1(x)$ lasse sich über das gesammte Innere des Einheits-Kreises als eindeutige analytische Function ohne singuläre Stellen fortsetzen, so muss eine für $|x| < 1$ convergirende Potenzreihe existiren, deren Summe $f_1(x)$ ist, also:

$$(4) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu \qquad (|x| < 1).$$

Es ist nun leicht zu ersehen, dass diese Potenzreihe auf dem Einheitskreise nicht convergiren kann. Denn wäre dies der Fall, so hätte man:

$$(5) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

und die Vergleichung mit (3) würde ergeben, dass gleichzeitig:

$$A_\nu = a_\nu + b_\nu i \quad \text{und} \quad A_\nu = -(a_\nu + b_\nu i)$$

sein müsste, was unmöglich ist.

Man hätte also auf diese Weise in der That eine Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ gewonnen, welche die oben verlangte Eigenschaft hat, auf dem Einheitskreise zu divergiren, obschon daselbst eine convergente trigonometrische Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ vorhanden ist.

Diese letztere besitzt hier in gewisser Beziehung noch einen ganz speciellen Charakter: sie bildet nämlich die Grenze der Entwickelung von $f_1(x)$ nach negativen Potenzen von x. Man erkennt indessen, dass diese Eigenschaft durchaus unwesentlich und in Wahrheit auch leicht zu beseitigen ist. Bezeichnet man nämlich mit $f_2(x) = \sum B_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe, deren Convergenzradius $\varrho \geq 1$ ist, und die im Falle $\varrho = 1$ auf dem Einheitskreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt, so wird offenbar die Reihe:

$$(6) \qquad f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu \pm B_\nu) \cdot x^\nu$$

für $x = e^{\vartheta i}$ gerade so divergiren, wie die Reihe $f_1(x)$, während

$$(7) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu \left\{ (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu\vartheta i} \pm B_\nu \cdot e^{\nu\vartheta i} \right\}$$

wird, und diese convergirende trigonometrische Reihe jetzt nicht mehr die Grenze der Entwickelung von $f(x)$ nach negativen, und im Falle $\varrho = 1$ auch nicht diejenige der Entwickelung von $f(x)$ nach positiven und negativen Potenzen von x bildet. Man erzielt dies z. B. am einfachsten, wenn man speciell setzt:

$$(8) \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (a_\nu - b_\nu i) \cdot x^\nu$$

also:

$$(9) \qquad f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu (a_\nu - b_\nu i)(\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$
$$= \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta),$$

in welchem Falle dann $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ auf dem Einheitskreise durch die trigonometrische Reihe $2\varphi(\vartheta)$ bezw. $2i \cdot \psi(\vartheta)$ dargestellt wird.

Durch die vorstehende Betrachtung ist die Möglichkeit, Reihen der gedachten Art zu construiren, erwiesen, sobald es gelingt, Reihen nach negativen Potenzen von x, wie die oben mit $f_1(x)$ bezeichnete, herzustellen, welche auf dem Einheitskreise convergiren und in das Innere als eindeutige, durchweg reguläre Functionen von x fortgesetzt werden können. Um dies zu erreichen, wird man natürlich zunächst nicht wie oben von irgend einer bestimmten Annahme bezüglich der Coefficienten a_ν, b_ν ausgehen können, sondern vielmehr von einer Feststellung der Singularitäten, welche für $f_1(x)$ auf dem Einheitskreise erforderlich und zulässig erscheinen. Man erkennt aber ohne weiteres, dass hierbei ausserwesentlich singuläre Stellen, sowie algebraische und logarithmische Verzweigungspunkte jedenfalls von vornherein auszuschliessen sind, da die ersteren die Divergenz von $\sum (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu \vartheta i}$ nach sich ziehen, die letzteren die eindeutige Fortsetzbarkeit von $f_1(x)$ verhindern würden. Als möglicherweise zulässig bleiben daher nur wesentlich singuläre Stellen, welche noch die besondere Eigenschaft besitzen müssen, dass $f_1(x)$, falls die Variable x von aussen her oder längs der Peripherie des Einheitskreises sich einer solchen Stelle nähert, unter einer endlichen Grenze oder zum mindesten integrabel bleibt.

Der Einfluss, den eine derartige, auf dem Convergenzkreise einer Potenzreihe angenommene singuläre Stelle auf deren Convergenz und Divergenz ausübt, soll nun zunächst genauer untersucht werden.

§ 3.

Es sei $f(x)$ eindeutig und regulär für $|x| < R$, wo $R > 1$, mit Ausnahme einer einzigen Stelle auf dem Einheitskreise $x = a = e^{\alpha i}$. Bezüglich der Beschaffenheit dieser singulären Stelle $x = a$ unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

I. Es sei $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. das Integral $\int_{x_0}^{a} |f(x)| \cdot dx$ werde in diesem Falle mit $|x_0 - a|$ beliebig klein — eine Bedingung, welche z. B. stets erfüllt ist, wenn $|f(x)|$ im Innern und auf der Peripherie des Einheitskreises in jeder beliebigen Nähe der Stelle a stets unter einer festen Grenze bleibt.

Alsdann lässt sich zeigen, dass die zunächst für $|x| < 1$ geltende Potenzreihe für $f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu$ noch für $|x| = 1$ mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = a$ convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist.

Um dies nachzuweisen, denke man sich den Einheitskreis (E) construirt und die Stelle a mit einem Kreise (K) von beliebig klein anzunehmendem Radius ϱ umgeben. Bezeichnet man sodann mit (C) diejenige Curve, welche aus dem Einheitskreise (E) entsteht, wenn man das kleine durch den Kreis (K) ausgeschnittene Bogenstück (e) durch das entsprechende, innerhalb (E) verlaufende Bogenstück (k) von (K) ersetzt, so hat man für alle Stellen x im Innern von (C), also sicher für $|x| < 1 - \varrho$:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt$$

(wobei das Pluszeichen vor C die positive Integrationsrich-

tung andeuten soll. Da aber in Folge der gemachten Voraussetzung der von dem Bogenstücke (k) herrührende Bestandtheil dieses Integrals, gerade so wie ein über (e) zu erstreckendes mit (k) und (e) — also schliesslich mit ϱ — beliebig klein wird, und da andererseits $f(x)$ einen eindeutig bestimmten, von ϱ unabhängigen Werth hat, so kann man ohne weiteres das Integral über (k) durch das entsprechende über (e) ersetzen und erhält somit an Stelle der Beziehung (1) jetzt für $|x| < 1$ die folgende:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt, \tag{2}$$

und hieraus in der üblichen Weise:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu \tag{3}$$

wo:

$$\left\{\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta \\ A_\nu &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t^{\nu+1}} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{-\nu \eta i} \cdot d\eta \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Dabei lassen sich diese Coefficienten A_ν noch in folgender Weise umformen. Bezeichnet man wieder mit (C) den oben definirten Integrationsweg, so hat man offenbar:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder, da man hier wieder genau wie oben den Integrationsweg (C) durch den Weg (E) ersetzen kann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{\nu \eta i} \cdot d\eta = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

Durch Addition und Subtraction dieser letzten Gleichung lässt sich daher A_ν in die doppelte Form setzen:

$$(6)\quad A_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu\eta \cdot d\eta \\ \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \sin \nu\eta \cdot d\eta \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und man erhält daher, wenn man $x = r \cdot e^{\vartheta i}$ setzt und $r < 1$ annimmt, aus Gl. (3) die Entwickelung:

$$(7)\ f(r \cdot e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}_\nu\, r^\nu \cdot \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$

Andererseits muss sich $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen in eine mit eventuellem Ausschluss der einzigen Stelle $\vartheta = a$ convergirende Fourier'sche Reihe entwickeln lassen, nämlich:

$$(8)\quad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}_\nu \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$

und da die Reihe (7) für $r = 1$ in diese letztere übergeht, so folgt, dass in dem hier betrachteten Falle die Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ noch für $x = e^{\vartheta i}$ (mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$, $\vartheta = a$) convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist. —

II. Es sei jetzt $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, wenn der Integrationsweg dem Aeusseren oder der Peripherie des Einheitskreises angehört.

Für das Gebiet $1 < |x| < R$ existirt alsdann nach dem Laurent'schen Satze eine Entwickelung von der Form:

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu + \sum_{1}^{\infty} A_{-\nu} x^{-\nu},$$

wobei die Reihe der positiven Potenzen (welche sich auf die Constante A_0 reducirt, wenn $f(x)$ überhaupt keine weitere singuläre Stelle ausser $x = a$ besitzt) für $|x| < R$, also insbesondere noch für $|x| = 1$ absolut convergirt. Setzt man also Gl. (9) in die Form:

$$(10) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} A_{-\nu} x^{-\nu} = f(x) - \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu$$

so folgt mit Hülfe der Substitution $x = \frac{1}{y}$ aus dem Ergebnisse des Falles I ohne weiteres, dass $\sum A_{-\nu} x^{-\nu}$ noch auf dem Einheitskreise — mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$ — convergiren muss. Das Gleiche gilt somit von der Gesammtreihe (9), woraus dann auch wiederum die Identität von $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ sich ergiebt.

Daraus kann man aber mit Hilfe der in § 2 angestellten Betrachtung weiter schliessen, dass die im Innern des Einheitskreises geltende Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x auf dem Einheitskreise divergiren muss.

Um die Beschaffenheit dieser letzteren Reihe und ihre Beziehung zu der Fourier'schen Entwickelung von $f(e^{\vartheta i})$ genauer festzustellen, hat man auch hier wiederum für $|x| < 1 - \varrho$ zunächst:

$$(11) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt$$

(wo ϱ und (C) die in I angegebene Bedeutung haben). Bezeichnet man sodann mit (k') das ausserhalb des Einheitskreises verlaufende Bogenstück des kleinen Kreises um a, so

kann hier offenbar das über den aus (e) und (k') zusammengesetzten, geschlossenen Weg erstreckte Integral: $\int \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt$ durch Verkleinerung von ϱ beliebig klein gemacht werden, muss also, da es einen von ϱ unabhängigen, bestimmten Werth besitzt, gleich Null sein. Addirt man dieses Integral zu dem in Gl. (11), so ergiebt sich:

$$
(12) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt
$$

für $|x| < 1 - \varrho$, bezw. für $|x| < 1$, wenn man schliesslich ϱ unendlich klein werden lässt.

Um zunächst das zweite Integral auszuwerthen, hat man:

$$
\frac{1}{t-x} = -\frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t-a}{x-a}} = -\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{(t-a)^{\nu-1}}{(x-a)^{\nu}}
$$

und daher:

$$
(13) \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (x-a)^{-\nu} \cdot \int\limits_{(+K)} f(t) \cdot (t-a)^{\nu-1} \cdot dt \\ &= \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} C_{-\nu} \cdot (x-a)^{-\nu}. \end{aligned} \right.
$$

Die rechte Seite lässt sich in eine für $|x| < |a|$ d. h. für $|x| < 1$ convergirende Reihe nach positiven Potenzen von x entwickeln, so dass sich ergiebt:

$$
(14) \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} B_{\nu} x^{\nu},
$$

wo:

$$
(15) \qquad B_{\nu} = \sum_{1}^{\infty}{}^{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \cdot (\varkappa + \nu - 1)_{\nu} \cdot C_{-\varkappa} a^{-(\varkappa+\nu)}.
$$

Ferner hat man für $|x| < 1$:

$$
(16) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} B'_{\nu} x^{\nu}
$$

wo:

$$(17)\begin{cases} B'_0 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta \\ B'_\nu = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{+E} \frac{f(t)}{t^{\nu+1}}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{-\nu\eta i}\cdot d\eta \quad (\nu=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

Hiernach liefert Gl. (12) für $|x| < 1$ die folgende Entwickelung:

$$(18)\qquad f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu B'_\nu x^\nu + \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}(x-a)^{-\nu}$$
$$= \sum_0^\infty{}^\nu (B'_\nu + B_\nu)\cdot x^\nu,$$

deren zweiter Theil, wie die Form der Coefficienten $C_{-\nu}$ (s. Gl. (13)) lehrt, die Gesammtheit derjenigen Bestandtheile enthält, welche die Stelle a zu einer (wesentlich) singulären machen: es sind nämlich die Coefficienten $C_{-\nu}$ genau diejenigen, welche man als Coefficienten der negativen Potenzen von $x-a$ erhalten würde, wenn man $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x=a$ nach dem Laurent'schen Satze entwickelt. Hieraus folgt aber, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}^\nu B'_\nu x^\nu = f(x) - \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}(x-a)^{-\nu}$$

noch für $x=a$, also schliesslich auf dem ganzen Einheitskreise sich regulär verhält. Sie besitzt somit einen Convergenzradius, der grösser als 1 sein muss (nämlich den Convergenzradius R[1]), so dass sie insbesondere für $|x|=1$

[1]) Dabei ist $R=\infty$, wenn $f(x)$ keine weiteren singulären Stellen im Endlichen besitzt; und falls auch die Stelle $x=\infty$ keine singuläre ist, so reducirt sich jene Reihe auf das constante Anfangsglied:

$$B'_0 = f(o) - \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}\cdot(-a)^{-\nu}$$
$$= f(o) - B_0.$$

noch absolut convergirt. Da aber die Gesammt-Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x, wie oben bemerkt, für $|x| = 1$ divergirt, so erkennt man, dass diese Divergenz ausschliesslich von jenem zweiten Bestandtheile $\sum_0^\infty{}^\nu B_\nu x^\nu$ herrührt.

Es lässt sich aber auch genau angeben, welche convergente Entwickelung für $x = e^{\vartheta i}$ an die Stelle jenes divergenten Bestandtheils tritt, dergestalt dass für $f(e^{\vartheta i})$ schliesslich eine convergente trigonometrische — nämlich die Fourier'sche — Reihe zu Stande kommt.

Hierzu bemerke man, dass die Coefficienten B'_ν zwar in (17) zunächst genau in derselben Integralform erscheinen, wie die A_ν im Falle I (s. Gl. (4)): aber es ist a priori klar, dass sie nicht, wie jene, mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten von $f(e^{\vartheta i})$ identisch sein können. Um den Zusammenhang mit diesen letzteren aufzuklären, hat man die Beziehung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wofür man wiederum, analog wie oben, schreiben kann:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+B)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt$$

$$(19) \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{\nu\eta i}\cdot d\eta - D_\nu,$$

wo:

$$D_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} (a+(t-a))^{\nu-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\nu{}_\varkappa \int_{(K)} (\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot a^{\nu-\varkappa}\cdot (t-a)^{\varkappa-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$(20)\qquad D_\nu = \sum_1^\nu{}^\varkappa (\nu-1)_{\varkappa-1}\, C_{-\varkappa}\cdot a^{\nu-\varkappa}.$$

Durch Addition bezw. Subtraction von Gl. (17) und (19) folgt alsdann:

$$(21)\qquad B'_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta - D_\nu \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta + D_\nu, \end{cases}$$

so dass die Entwickelung (18) für $x = r\cdot e^{\vartheta i}$ und $r < 1$ sich folgendermaassen schreiben lässt:

$$(22)\ f(re^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}^\nu r^\nu\cdot\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu(\eta-\vartheta)\cdot d\eta$$
$$- \sum_1^\infty{}^\nu D_\nu r^\nu e^{-\nu\vartheta i} + \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu r^\nu\cdot e^{\nu\vartheta i}.$$

Da andererseits:

$$(23)\ f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}^\nu \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu(\eta-\vartheta)\cdot d\eta$$

und in Gl. (22) für $r = 1$ alles mit Ausnahme des letzten Bestandtheils convergent bleibt, so folgt:

$$(24)\qquad \lim_{r=1}\left\{\sum_0^\infty{}^\nu B_\nu r^\nu e^{\nu\vartheta i}\right\} = \sum_1^\infty{}^\nu D_\nu e^{-\nu\vartheta i},$$

womit die gesuchte Grenz-Entwickelung von $\sum B_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ gefunden ist.

§ 4.

I. Setzt man jetzt:

$$(1)\qquad f_1(x) = e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\,{}^{1)},$$

so erfüllt offenbar die einzige singuläre Stelle $x = 1$ dieser Function die im Art. I des vorigen Paragraphen eingeführten Bedingungen. Man hat nämlich, um das Verhalten von $f_1(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu erkennen:

$$(2)\qquad f_1(1 + \xi + \eta i) = e^{1 + \frac{\xi - \eta i}{\xi^2 + \eta^2}}$$

also:

$$(3)\qquad |f_1(1 + \xi + \eta i)| = e^{1 + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Gehört nun die Stelle $x = 1 + \xi + \eta i$ noch dem Innern des Einheitskreises an, so ist ξ wesentlich negativ und daher — was auch η bedeuten möge — stets: $|f_1(x)| < e$.

Gehört hingegen x der Peripherie des Einheitskreises an, so möge gesetzt werden $x = e^{\vartheta i}$, also:

$$x + 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} + e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$x - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2ie^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin\frac{\vartheta}{2}$$

und:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}$$

folglich:

$$(4)\qquad f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right)\right\},$$

---

[1]) Der Factor e ist nur hinzugefügt, um einen möglichst einfachen Ausdruck für die Entwicklungs-Coefficienten zu erhalten (s. Gl. (9)).

so dass also in diesem Falle $|f_1(x)| = e^{\frac{1}{2}}$ wird — auch in beliebiger Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ d. h. $x = 1$.

Es muss daher nach Art. I des vorigen Paragraphen die zunächst für $|x| < 1$ geltende Entwickelung:

$$(5) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu$$

noch für $|x| = 1$ — mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$ — convergiren, d. h. es gilt die Entwickelung:

$$(6) \quad f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot \frac{\vartheta}{2}} = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

für $0 < \vartheta < 2\pi$, und dieselbe ist mit der Fourier'schen Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ identisch.

Daraus folgt dann noch insbesondere, dass die Reihe für $\vartheta = 0$ divergirt.

Was die Coefficienten A_ν betrifft, so findet man aus:

$$e \cdot e^{\frac{1}{x-1}} = e \cdot \sum_0^\infty{}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!}(1-x)^{-\varkappa}$$

$$= e\left(1 + \sum_1^\infty{}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \sum_0^\infty{}^\nu (\varkappa + \nu - 1)_\nu x^\nu\right)$$

unmittelbar für $\nu \geq 1$:

$$(7) \qquad A_\nu = e \cdot \sum_1^\infty{}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\varkappa + \nu - 1)_\nu$$

$$= e \cdot \sum_1^\infty{}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!}(\varkappa + \nu - 1)_{\varkappa - 1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots.)$$

und speciell: $A_0 = e \cdot \sum_0^\infty{}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} = 1$. Man kann aber auch die hier in Form unendlicher Reihen erscheinenden Grössen A_ν mit Hülfe der Mac Laurin'schen Entwickelung in geschlossener Form darstellen.

Man findet auf diese Weise:

$$A_0 = f_1(0) = 1$$

und für $\nu \geqq 1$:

$$A_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot f_1^{(\nu)}(0) = \frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \left(\frac{d^\nu e^{\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu} \right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} \right)_{y=-1}.$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot \frac{d^\nu \varphi(y)}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \frac{d^\nu (y^{\nu-1} \cdot \varphi(y))}{d y^\nu}$$

$$= (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa \, \nu_\varkappa \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\varkappa-1)!} \cdot y^{\varkappa-1} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

$$(8) \qquad = (-1)^\nu \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

und daher:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot e^{1+y} \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa},$$

also schliesslich:

$$(9) \qquad A_\nu = \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1}.$$

II. Die Function:

$$(10) \qquad f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = e \cdot e^{-\frac{x}{x-1}},$$

welche zu der eben betrachteten in der zwiefachen Beziehung steht:

$$(11) \qquad f_2(x) = \begin{cases} f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ e \cdot \frac{1}{f_1(x)} \end{cases},$$

genügt, wie leicht zu sehen, den in Art. II des vorigen Paragraphen statuirten Bedingungen. Da nämlich:

$$(12)\qquad f_2(1+\xi+\eta i) = e^{\frac{\xi-\eta i}{\xi^2+\eta^2}}$$

also:

$$(13)\qquad |f_2(1+\xi+\eta i)| = e^{-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}}$$

so wächst dieser absolute Betrag über alle Grenzen, falls $|\eta| \leqq k \cdot |\xi|$ (k eine endliche positive Zahl) und ξ negativ, numerisch sehr klein genommen wird, also wenn x auf irgend einer geraden Linie aus dem Innern des Einheitskreises sich der Stelle 1 nähert. Da im übrigen $|f_2(x)|$, wie die erste der Beziehungen (11) lehrt, für Stellen ausserhalb oder auf der Peripherie des Einheitskreises auch in beliebiger Nähe der Stelle $x=1$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus Art. II des vorigen Paragraphen, dass die für $|x|<1$ geltende Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x|=1$ divergiren muss, während andererseits $f_2(e^{\vartheta i})$ durch eine convergente trigonometrische Reihe mit ganz neuen Coefficienten darstellbar ist. Um diese letztere zu finden, kann man ohne weiteres die Formel (24) des vorigen Paragraphen anwenden. Man hat — unter Beibehaltung der dort angewendeten Bezeichnungen:

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + \sum_1^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}(x-1)^{-\nu}$$

also:

$$C_{-\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}$$

und daher (nach § 3, Gl. (20)):

$$D_\nu = \sum_1^\nu{}^{\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \quad \text{d. h.} = A_\nu \text{ (Gl. (9))},$$

so dass jene Gl. (24) hier lauten würde:

$$(14)\qquad \lim_{r=1}\left\{\sum_0^\infty{}^\nu B_\nu\, r^\nu\, e^{\nu\vartheta i}\right\} = \sum_1^\infty{}^\nu A_\nu\, e^{-\nu\vartheta i}.$$

Beachtet man jetzt noch, dass die in § 3 mit B'_ν bezeichneten Grössen für $\nu \geq 1$ sämmtlich Null sind (da $f_2(x)$ keine singuläre Stelle ausser $x = 1$ besitzt) und dass (§ 3, Fussnote):

$$B'_0 = f_2(0) - \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} = e - (e-1) = 1 = A_0,$$

so kann man Gl. (14) mit Hinzufügung des Gliedes B'_0 folgendermaassen schreiben:

$$(15)\qquad f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu(\cos\nu\vartheta - i\cdot\sin\nu\vartheta),$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit man mit Hülfe der Gleichungen (11) und (6) sofort verificiren kann.

Es scheint mir auch nicht ohne Interesse, die aus den allgemeinen Ergebnissen des vorigen Paragraphen hergeleitete Divergenz der Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x| = 1$ nachträglich noch durch die Rechnung direct zu bestätigen.

Es werde gesetzt für $|x| < 1$:

$$(16)\qquad f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu\, x^\nu$$

(wobei also jetzt das im allgemeinen Falle und oben mit $B'_0 + B_0$ bezeichnete constante Glied der Einfachheit halber mit B_0 bezeichnet ist).

Alsdann hat man $B_0 = f_2(0) = e$ und für $\nu > 1$ zunächst:

$$B_\nu = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu e^{-\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu}\right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu e^{-y}}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu}\right)_{y=-1}.$$

also mit Benützung von Gl. (8):

$$\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{d^\nu e^{-y}}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu\cdot e^{-y}\cdot\sum_1^\nu{}^\varkappa(-1)^\varkappa\cdot\frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot y^{\nu+\varkappa}$$

schliesslich:

$$(17)\qquad B_\nu = e\cdot\sum_1^\nu{}^\varkappa\frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}.$$

Da hiernach:

$$B_\nu > e\left(1+\frac{\nu-1}{2}\right),$$

so wird mit $\nu=\infty$ auch $\lim B_\nu=\infty$, was dann nothwendig die Divergenz von $\Sigma B_\nu x^\nu$ für $|x|=1$ zur Folge hat.

III. Die soeben betrachtete trigonometrische Reihe für $f_2(e^{\vartheta i})$ convergirte mit Ausschluss der einen Stelle $\vartheta=0$. Man kann indessen aus den Ausdrücken $f_1(x)$, $f_2(x)$ leicht neue bilden, deren trigonometrische Entwickelung auf dem Einheitskreise ausnahmslos convergirt, während die betreffende Potenzreihe dort divergirt.

Setzt man zunächst:

$$(18)\qquad \begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x)-f_2(x) \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} - e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{2}}\left\{e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}}\right\} \\ &= 2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2i}\cdot\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

so wird die für $|x|<1$ geltende Potenzreihe:

$$(19)\qquad f_3(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu - B_\nu)\cdot x^\nu$$

wiederum für $x=e^{\vartheta i}$ divergiren. Dagegen wird die Reihe:

$$(20)\quad f_3(e^{\vartheta i}) = -2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) = 2i\sum_1^\infty{}^\nu A_\nu\cdot\sin\nu\vartheta$$

jetzt auch noch für $\vartheta = 0$, also ausnahmslos convergiren. Sie convergirt freilich in der Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ ungleichmässig — wegen der unendlich vielen Maxima und Minima, welche $f_3(e^{\vartheta i})$ daselbst besitzt.

Indessen auch diese Eigenschaft lässt sich noch beseitigen. Ich setze:

$$(21) \qquad F_1(x) = (x-1) \cdot f_1(x)$$

so hat man für $|x| < 1$ nach Gl. (5):

$$(22) \qquad F_1(x) = (x-1) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu$$
$$= -A_0 + \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) x^{\nu+1}$$

und nach § 3, Art. I für $0 < \vartheta < 2\pi$:

$$(23) \qquad F_1(e^{\vartheta i}) = 2i \cdot \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \left(\vartheta - \cot\frac{\vartheta}{2}\right)}$$
$$= -A_0 + \sum_0^\infty {}^\nu \left(A_\nu - A_{\nu+1}\right) \cdot e^{(\nu+1)\vartheta i}.$$

Diese Reihe convergirt aber auch noch für $\vartheta = 0$ — nämlich gegen den Werth Null (da in Folge der bewiesenen Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ offenbar $\lim\limits_{\nu=\infty} A_\nu = 0$ sein muss). Sie convergirt somit ausnahmslos und, da sie mit der Fourier'schen Reihe für die stetige Function $F_1(e^{\vartheta i})$ identisch ist, auch durchweg gleichmässig.

Betrachtet man nun ferner die Function:

$$(24) \qquad F_2(x) = (x-1) \cdot f_2(x)$$

so wird für $|x| < 1$:

$$(25) \quad F_2(x) = (x-1) \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu x^\nu \quad -B_0 + \sum_0^\infty {}^\nu (B_\nu - B_{\nu+1}) \cdot x^{\nu+1}$$

und diese Reihe muss wiederum nach § 3, Art. II für $x = e^{\vartheta i}$ divergiren (da ja der Charakter der singulären Stelle $x = 1$ durch den Factor $(x - 1)$ keine wesentliche Veränderung erleidet).

Andererseits hat man aber für $|x| > 1$ nach Gl. (11) und (5):

$$F_2(x) = (x-1) \cdot f_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= (x-1) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^{-\nu}$$

$$(26) \qquad = A_0 x - \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot x^{-\nu}$$

und da nach § 3, Art. I diese Reihe noch für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen convergiren muss:

$$(27) \qquad F_2(e^{\vartheta i}) = A_0 e^{\vartheta i} - \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot e^{-\nu \vartheta i}.$$

Die Vergleichung mit der Reihe (23) zeigt dann aber ohne weiteres, dass auch diese Reihe ausnahmslos und durchweg gleichmässig convergiren muss.

Hieraus erkennt man also, dass selbst in dem Falle, wo die Randfunction in eine ausnahmslos gleichmässig convergirende trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, man noch keineswegs ohne weiteres auf die Convergenz der im Innern geltenden Potenzreihe für die Stellen des Convergenzkreises schliessen darf.

§ 5.

Während das Charakteristische der in Art. II und III des vorigen Paragraphen betrachteten Beispiele darin bestand, dass die betreffenden Potenzreihen auf dem Convergenzkreise divergiren, obschon die zugehörige Randfunction durch eine convergente Fourier'sche Reihe darstellbar

ist, will ich jetzt, wie in § 1 angekündigt wurde, ein Beispiel einer Potenzreihe geben, welche nachweislich auf dem Convergenzkreise (mit Ausschluss einer einzigen Stelle) noch convergirt, wohingegen die Existenz einer „eigentlichen" Fourier'sche Reihe, d. h. einer solchen mit schlechthin convergenten Integral-Coefficienten (vgl. § 1) nach der Natur der dargestellten Function definitiv ausgeschlossen erscheint.

Ich setze:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)\, lg\,(1-x)} \tag{1}$$

also für $|x| < 1$:

$$f(x) = \frac{\sum_0^\infty{}^{\nu}\, x^\nu}{\sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{x^\nu}{\nu+1}} = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu \tag{2}$$

und daher:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \left(\frac{a_0}{\nu+1} + \frac{a_1}{\nu} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{2} + \frac{a_\nu}{1}\right) x^\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, x^\nu \tag{3}$$

so dass sich zur Bestimmung der Coefficienten a_ν die Recursionsformel ergiebt:

$$\sum_0^\nu{}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

und hieraus speciell:

$$a_0 = 1. \tag{5}$$

Ich zeige nun, dass die Coefficienten a_ν sämmtlich positiv sind, mit wachsendem Index ν beständig abnehmen und für $\nu = \infty$ gegen Null convergiren.

Schreibt man in Gl. (2) $(\nu - 1)$ statt ν, also:

$$\sum_0^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu-\varkappa} = 1, \tag{6}$$

und setzt Gl. (4) in die Form:

$$(7) \qquad \sum_{0}^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} + a_\nu = 1,$$

so folgt durch Subtraction:

$$(8) \qquad a_\nu = \sum_{0}^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{(\nu-\varkappa)(\nu+1-\varkappa)}$$

Hieraus ergiebt sich, dass $a_\nu > 0$ ist, wenn das gleiche von $a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$ gilt. Da aber $a_0 = 1$, so folgt in der That allgemein: $a_\nu > 0$.

Schreibt man ferner die Gleichungen (4) und (6) folgendermaassen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\nu+1} + \displaystyle\sum_{1}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1 \\ \displaystyle\sum_{1}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1}}{\nu+1-\varkappa} = 1, \end{cases}$$

so folgt wiederum durch Subtraction und Multiplication mit $\nu + 1$:

$$(10) \qquad (\nu+1) \sum_{1}^{\nu} {}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1} - a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1.$$

Setzt man hier $\nu - 1$ für ν, also:

$$(11) \qquad \nu \cdot \sum_{1}^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1} - a_\varkappa}{\nu-\varkappa} = 1$$

und subtrahirt diese Gleichung von der vorigen, so kommt:

$$\sum_{1}^{\nu-1} {}^{\varkappa} \left\{ \frac{\nu+1}{\nu+1-\varkappa} - \frac{\nu}{\nu-\varkappa} \right\} (a_{\varkappa-1} - a)_\varkappa + (a_{\nu-1} - a_\nu) = 0,$$

oder anders geschrieben:

$$(12) \qquad a_{\nu-1} - a_\nu = \sum_{1}^{\nu-1} {}^{\varkappa} \frac{\varkappa(a_{\varkappa-1} - a_\varkappa)}{(\nu-\varkappa)(\nu+1-\varkappa)},$$

d. h. $a_{\nu-1} - a_\nu$ ist sicher positiv, falls alle vorangehenden Differenzen es sind. Da aber aus Gl. (10) für $\nu = 1$:

$a_0 - a_1 = \frac{1}{2}$ sich ergiebt, so folgt wiederum, dass allgemein: $a_{\nu-1} - a_\nu > 0$ sein muss.

Da hiernach die positiven Grössen a_ν mit wachsendem ν beständig abnehmen, so besitzen sie für $\nu = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth. Dieser muss aber Null sein, da andernfalls die linke Seite der Recursionsformel (4) wegen der Divergenz der harmonischen Reihe mit ν in's Unendliche wachsen würde.

Aus den eben nachgewiesenen Eigenschaften der Coefficienten a_ν folgt aber bekanntlich die gleichmässige Convergenz der Reihen $\sum a_\nu \cos \nu \vartheta$, $\sum a_\nu \sin \nu \vartheta$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $\vartheta = 0$, also schliesslich die gleichmässige Convergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$. Hier divergirt in der That die betrachtete Reihe, wie sich daraus ergiebt, dass $\lim_{x=1} f(x) = +\infty$ wird, wenn x auf dem Radius der Stelle 1 zustrebt.

Andererseits erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ als Function von x in der Nähe der Stelle $x = 1$ nicht integrabel ist, da sie für $x = 1$ so unendlich wird, wie $\frac{d\, lg\, lg(1-x)}{dx}$. Es muss dann aber auch $f(e^{\vartheta i})$ als Function von ϑ an der Stelle $\vartheta = 0$ die Integrabilität verlieren, da $(e^{\vartheta i} - 1) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}$ für $\vartheta = 0$ gerade so von der ersten Ordnung verschwindet, wie $(x - 1)$ für $x = 1$. Hieraus folgt dann aber, dass die Integral-Coefficienten der Fourier'schen Reihe im „eigentlichen" Sinne divergent werden müssen: die betreffende Reihe ist also eine „uneigentliche" Fourier'sche Reihe in dem oben (§ 1) näher definirten Sinne.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1895.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die heutige Festsitzung zu Ehren unseres hohen Protectors, des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, zu dem wir ehrfurchtsvoll aufblicken, mahnt uns zugleich, seiner Vorgänger aus dem Hause Wittelsbach zu gedenken, welche sich um unsere Akademie in hervorragendem Maasse verdient gemacht haben.

Vier von ihnen, welche wir theils als Stifter, theils als Reorganisatoren der Akademie verehren, hat unsere Akademie bei der Herstellung und Errichtung dieses Festsaales dadurch besonders zu ehren geglaubt, dass sie inmitten der Symbole und Wahlsprüche unserer Akademie ihre Portraits an der Decke des Saales anbrachte.

Zunächst ist es der eigentliche Stifter unserer Akademie, Kurfürst Maximilian III., welcher nach den Worten meines Vorgängers an dieser Stelle in ihr „einen Herd für Geistesbildung und ernste Studien für Bayern geschaffen“ und „in einem bislang finsteren Gebäude die erste Fackel angezündet hat“.

Ihm zur Seite ist das Bild des Kurfürsten Karl Theodor, des Stifters der kurpfälzischen Akademie der Wissenschaften, welche zugleich mit der alten kurbayerischen in der jetzigen königlichen Akademie fortbesteht. Karl Theodor hat sich unter uns dadurch ein bleibendes dankbares Angedenken gesichert, dass ein von ihm herstammender Fonds von etwa 180,000 Mark, der sogenannte Mannheimer Fonds, eines der wenigen Stiftungscapitalien ist, über deren Rente unsere Akademie in freier Weise für wissenschaftliche Zwecke verfügen kann.

Der dritte, als Stifter von uns verehrte Fürst aus dem Hause Wittelsbach ist König Max Joseph I., welcher im Jahre 1807 der Akademie eine den Fortschritten der Wissenschaft, sowie der grösseren Ausdehnung des bayerischen Staates angepasste Organisation gegeben hat.

Damals wurden unserer Akademie eine grössere Reihe von wissenschaftlichen Sammlungen und Instituten angegliedert und untergeordnet, von welchen ich die damalige Hofbibliothek, jetzige Hof- und Staatsbibliothek, das Naturaliencabinet, das chemische Laboratorium, das Münzcabinet, das Antiquarium, das astronomische Observatorium als die wichtigsten nenne.

Eine Aenderung in dieser Organisation veranlasste die Verlegung der Ludwig-Maximilians-Universität von Landshut nach München, welche im Jahre 1826 unter der Regierung König Ludwigs I. erfolgte. Manche der genannten und andere wissenschaftliche Institute und Sammlungen mussten nun in nähere Verbindung mit der Hochschule gebracht und desshalb aus ihrer bisherigen Abhängigkeit von der Akademie theilweise befreit werden. Es erschien als zweckmässig, in der Form einer Personalunion ihre Verbindung mit der Akademie fortzusetzen, indem die Akademiker, welche Conservatoren von Sammlungen waren, auch zu Universitätsprofessoren, oder umgekehrt Universitätsprofessoren zu Conserva-

toren ernannt wurden. Die bis dahin der Akademie angegliederten wissenschaftlichen Institute und Sammlungen bildeten eine eigene unter dem Generalconservatorium geeinte Körperschaft, während die Akademie den Charakter eines freien Vereins von Gelehrten erhielt, dessen Aufgabe es sein sollte, die Wissenschaft zu pflegen und zu erweitern, sowie durch vereinte Kraft Werke hervorzubringen, welche die Kräfte des Einzelnen übersteigen.

Zugleich bekam die Akademie die Aufgabe, die wissenschaftliche Verbindung mit gelehrten Körperschaften des In- und Auslandes zu pflegen.

Die Personalunion mit jenen im Generalconservatorium vereinten wissenschaftlichen Sammlungen wurde dadurch hergestellt, dass der anfangs gewählte, dann vom König ernannte Vorstand der Akademie zugleich zum Generalconservator bestimmt wurde, sowie dadurch, dass in der Regel nur Mitglieder der Akademie zu Conservatoren der wissenschaftlichen Sammlungen und Institute ernannt wurden.

Durch diese Neuorganisation, welche heute noch das Grundgesetz beider Körperschaften bildet, hat König Ludwig I. den Anspruch erworben, den Gründern unserer Akademie beigezählt zu werden.

Unsere Akademie ist in den seitdem verstrichenen sieben Jahrzehnten der ihr gestellten Doppelaufgabe treu geblieben: in einer langen Reihe von Bänden hat sie durch vereinte Kraft wissenschaftliche Werke von bleibendem Werthe veröffentlicht; in stets steigendem Masse hat sie mit gelehrten Körperschaften des In- und Auslandes wissenschaftlichen Verkehr gepflogen und auf dem Wege des Schriftentausches die inzwischen selbständig gewordene Hof- und Staatsbibliothek mit einem Schatz werthvoller Bücher bereichert.

Aber eine neue grosse Aufgabe ist seither an unsere Akademie wie an die anderen verwandten Gelehrten-Gesellschaften der alten und neuen Welt herangetreten, die Auf-

gabe nämlich, nicht nur die wissenschaftlichen Untersuchungen ihrer Mitglieder durch den Druck zu veröffentlichen, sondern in freierer Weise auch gelehrte Forschungen Anderer auf allen Wissensgebieten anzuregen und zu unterstützen. Dieser Aufgabe können sich die Akademien in ihrer freien, nicht durch die Zwecke des Unterrichts gebundenen Verfassung weit besser unterziehen, als die Universitäten, oder als eine etwa unmittelbar von der Staatsregierung abhängige Behörde.

König Maximilian II., mit seinem erleuchteten und warmen Interesse für die Wissenschaft, hatte diese neue Aufgabe der Akademie klar erkannt: er begründete darum bei der historischen Classe unserer Akademie eine eigene historische Commission und stellte ihr die Rente eines Capitals von 650,000 Mark zur Verfügung mit der Aufgabe, Quellenmaterial für die deutsche Geschichte in ihrem ganzen Umfang aufzufinden und herauszugeben, wissenschaftliche Arbeiten auf diesem Gebiete hervorzurufen und ihre Publication zu ermöglichen.

Auch für die Naturwissenschaften hatte König Max Aehnliches im Sinne. Leider hat sein früher Tod die Ausführung vereitelt, so dass nunmehr die beiden anderen Classen unserer Akademie, die philosophisch-philologische und die mathematisch-physikalische, mit einem gewissen Neid auf ihre reichere Schwester blicken.

Und doch darf ich, ohne den Vorwurf einer unbilligen Bevorzugung des Wissensgebietes, dem ich persönlich meine Dienste gewidmet habe, befürchten zu müssen, hier die Behauptung aufstellen, dass heutzutage das Bedürfniss, auf dem Gebiet der Naturwissenschaften wissenschaftliche Untersuchungen anzuregen und zu unterstützen, allgemein als das allerdringendste empfunden wird.

Unsere Hoffnung, dass auf dem Wege der Staatshülfe dieses Bedürfniss eine ausgiebige Befriedigung finden werde, ist — offen gestanden — nur eine geringe. Es wäre auch

unbillig, von der Mehrheit der aus der Masse des Volkes gewählten Vertreter zu erwarten, dass sie alle ein klares Verständniss dafür haben, dass mittelbar die der reinen Wissenschaft dienenden Untersuchungen und Forschungen stets auch eine die Wohlfahrt und den Wohlstand des ganzen Volkes fördernde Folge haben, wofür ich Beispiele in meiner Antrittsrede als Präsident der Akademie mitgetheilt habe. Ferner sind die Anforderungen, welche Heer, Schule, Verkehr u. s. w. an die Steuerkraft des Landes stellen, so gross, dass jede Landtagsverhandlung fast immer wie ein Markten zwischen Regierung und Volksvertretung über das Mehr oder Minder der für diese nothwendigsten Bedürfnisse erforderlichen Geldmittel erscheint.

Eher dürfen wir erwarten, dass einzelne einsichtige und zugleich wohlhabende Männer, namentlich Industrielle, welche mit einem durch eigene wissenschaftliche Vorbildung geschärften Urtheil erkannt haben, welche Vortheile der von ihnen betriebene Industriezweig mittelbar streng wissenschaftlichen Forschungen und Untersuchungen verdankt, sich ihrerseits der Wissenschaft gleichsam wieder dankbar erweisen werden, indem sie unserer Akademie die nöthigen Mittel zur Verfügung stellen, naturwissenschaftliche Forschungen und Untersuchungen anzuregen und zu unterstützen. Solche Männer werden nicht so engherzig oder kurzsichtig sein, zu erwarten, dass derartige Untersuchungen gleich von vornherein sofort einen in Geldwerth umzurechnenden Nutzen versprechen, sondern sich von den Wahlsprüchen, welche unsere Akademie bei Ausschmückung dieses Saales sich angeeignet hat, den vor Augen halten, welcher sagt: Serimus arbores posteritati profuturas! Lasst uns Bäume pflanzen der Nachwelt zum Nutzen!

Wahlen.

Der Classensekretär, Herr C. v. Voit, giebt sodann die von der Akademie vorgenommenen und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigten Wahlen bekannt. Es wurden in der mathematisch-physikalischen Classe gewählt:

zum ordentlichen Mitgliede:

Dr. Ferdinand Lindemann, ordentlicher Professor der Mathematik an der hiesigen Universität, bisher ausserordentliches Mitglied;

zum ausserordentlichen Mitgliede:

Dr. Wilhelm von Miller, ordentlicher Professor der Chemie an der hiesigen technischen Hochschule;

zu correspondirenden Mitgliedern:

1. Francesco Brioschi, Präsident der Accademia dei Lincei und Professor der Mathematik am R. Istituto tecnico superiore in Mailand;
2. Dr. Karl Neumann, Professor der mathematischen Physik an der Universität zu Leipzig;
3. Dr. Hendrik Antoon Lorentz, Professor der Physik an der Universität zu Leiden;
4. Dr. Alexander Kowalewski, Professor der Zoologie und Akademiker zu St. Petersburg;
5. Albert Gaudry, Professor der Paläontologie am Jardin des Plantes zu Paris, Membre de l'Institut;
6. Sir Archibald Geikie, Generaldirektor der Geological Survey von Grossbritannien in London;
7. Nevil Story Maskelyne, Professor der Mineralogie an der Universität zu Oxford.

Sitzung vom 7. Dezember 1895.

1. Herr H. SEELIGER legt unter Besprechung des Inhalts eine Abhandlung des Herrn Professors Dr. R. LEHMANN-FILHÉS in Berlin: „Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft" vor.

2. Herr W. DYCK bringt eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. EDUARD VON WEBER: „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen" in Vorlage, welche sich an die in der Februar-Sitzung d. J. mitgetheilte Untersuchung anschliesst.

3. Herr C. v. VOIT theilt die Hauptresultate einer in seinem Laboratorium von Herrn Dr. ALEXANDER ELLINGER ausgeführten Untersuchung: „Ueber den Nährwerth des Antipeptons" mit.

Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft.

Von R. Lehmann-Filhés.

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Seitdem Laplace im VII. Capitel des X. Buches der Mécanique céleste eine Untersuchung über die Wirkung einer „transmission successive de la pesanteur" mitgetheilt hat, sind kritische Discussionen des Newton'schen Gravitationsgesetzes für lange Zeit von der Tagesordnung verschwunden. Erst in neuerer Zeit hat man derartige Fragen, über deren Wichtigkeit wohl kein Streit sein kann, wieder mehr in's Auge gefasst, indem man einerseits die Folgen einer etwaigen endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation für

die planetarischen Bewegungen auf Grund verschiedener Hypothesen erörtert, andererseits in Erwägung gezogen hat, ob die Intensität der Kraft nicht in einer anderen Form als Function des Abstandes der sich anziehenden Massentheilchen gegeben werden muss, als es durch Newton geschehen ist.

Besonders die letztere Frage hat vor etwa einem Jahre eine sehr bedeutsame Förderung erfahren durch Seeliger's Aufsatz „Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz“ (Astr. Nachrichten Nr. 3273). Eine weitere sehr umfassende Bereicherung der diesen Gegenstand betreffenden Literatur ist erfolgt durch die soeben erschienene Schrift von Carl Neumann, „Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen.“ Ueber den Inhalt dieses höchst wichtigen Werkes gab schon eine ohne Zweifel von C. Neumann selbst verfasste Anzeige in den „Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig“, 28. Jahrgang, Nr. 5 eine vorläufige Orientirung.

Ueber die zuerst genannte Frage, die nach der zeitlichen Fortpflanzung der Gravitation, liegt gleichfalls eine ansehnliche Literatur vor. In dieses Gebiet gehören auch die Untersuchungen über den Einfluss, welchen z. B. die relative Geschwindigkeit der sich anziehenden Punkte auf Grund des Weber'schen oder Riemann'schen Gesetzes auf die planetarischen Bewegungen ausübt. Eine sehr schätzbare Zusammenstellung der wichtigsten einschlägigen Arbeiten ist erst kürzlich in dem Aufsatze von S. Oppenheim „Zur Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation“, Jahresbericht über das k. k. Akademische Gymnasium in Wien für das Schuljahr 1894—95, gegeben worden.

Die vorhandenen Untersuchungen beziehen sich alle in erster Linie auf die Bewegung eines Planeten um die Sonne, und eine Anwendung der für diese gefundenen Formeln auf die Bewegung des Mondes, wie sie S. Oppenheim auf S. 18 seiner Schrift bei Besprechung der von v. Hepperger in den

Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1888 veröffentlichten Arbeit „Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation“ von dessen Ausdruck für die Säcularstörung der Länge eines Planeten gemacht hat, führt zu keinem richtigen Resultat.

Der Verfasser der vorliegenden Untersuchung hat bereits im Jahre 1884 in Nr. 2630 der Astr. Nachrichten eine Untersuchung über die Bewegung eines Planeten unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft veröffentlicht. Die der Rechnung zu Grunde gelegte, später auch von v. Hepperger in Anwendung gebrachte Hypothese ist die, dass die Gravitation ähnlich wie das Licht von dem Kraftcentrum ausstrahlt, und dass die Gravitationsstrahlen sich wie die Lichtstrahlen mit constanter Geschwindigkeit gradlinig im Raume verbreiten. Bei der Begegnung mit einem Massenpunkte ist also seit dem Ausgange des betreffenden Impulses eine, wenn auch noch so kurze Zeit vergangen, in welcher der anziehende Punkt im Allgemeinen seinen Ort geändert hat. Hierdurch entstehen dann Bewegungsstörungen gegenüber dem Fall einer sich momentan ausbreitenden Kraft, welche eine gewisse Analogie zu den Aberrationserscheinungen besitzen.

Diese Hypothese ist als eine rein mathematische aufzufassen, indem irgend eine Vorstellung über die physikalische Natur der Gravitation, wie wir sie z. B. bei Laplace finden, darin nicht ausgesprochen ist.

Die Durchführung der erörterten Hypothese ist nun jedenfalls eine unvollständige, so lange sie nicht auf denjenigen Himmelskörper, dessen Bewegung uns wegen seiner grossen Nähe ihre Eigenthümlichkeiten am deutlichsten erkennen lässt, angewendet ist. Auch unter Zugrundelegung anderer Hypothesen, z. B. des Weber'schen Gesetzes, ist die Mondbewegung bisher noch nicht genauer untersucht worden, offenbar deshalb, weil, wie v. Hepperger am Schlusse seiner

Abhandlung ganz richtig bemerkt, die Entwickelungen „in Folge der krummlinigen Bewegung der Erde und der durch die Sonne bewirkten Störungen mit grossen Schwierigkeiten verbunden" sind.

Wenn hier in dieser Richtung ein erster Schritt, der hoffentlich Nachfolge finden wird, gemacht wird, so ist von vornherein zu beachten, dass das Verfahren bei der ungemeinen Complication der Aufgabe nur ein approximatives sein kann. Auch ist das Thema insofern eingeschränkt worden, als vorzugsweise die Säcularstörung der Länge zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wurde, wozu der Umstand, dass ein Theil der säcularen Beschleunigung des Mondes durch die Theorie noch nicht erklärt ist, aufzufordern schien. Dass hierbei der Radiusvector und die Länge auch in allgemeiner Weise untersucht werden mussten, liegt in der Natur der Sache.

Das Resultat ist ein negatives, da nicht eine Beschleunigung, sondern eine Verzögerung der Mondbewegung gefunden wird, deren Betrag nochdazu zu Annahmen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation nöthigte, welche wenig plausibel erscheinen.

Derartige Rechnungsergebnisse dürfen nach Ansicht des Verfassers nicht dahin führen, die Behandlung der betreffenden Fragen überhaupt aufzugeben. Vielmehr sollte man die Untersuchungen auf verschiedenen Grundlagen weiterführen, „nicht etwa", wie C. Neumann in der erwähnten Anzeige seines Buches sagt, „in der Hoffnung, dass eine solche Theorie sofort zu physikalisch wichtigen Aufschlüssen führen werde, sondern nur in dem Bestreben, den ganzen Kreis der hierher gehörigen Vorstellungen zu ordnen, zu erweitern und vielleicht für künftigen Gebrauch nutzbar zu machen.

I. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Wir nehmen ein im Raume festes Coordinatensystem an, in Bezug auf welches der Schwerpunkt der Erde zur Zeit t die Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 habe. Ein Element dm_0 der Erdmasse habe in Bezug auf den Schwerpunkt die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ und den Abstand ϱ_0 von demselben, so dass

$$\varrho_0^2 = \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 \tag{1}$$

Das Massenelement der Erde wirkt anziehend auf das Massenelement dm des Mondes, dessen ganze Masse m heisse. In Bezug auf das feste Coordinatensystem habe dm die Coordinaten ξ'. η', ζ', in Bezug auf den Schwerpunkt der Erde x', y', z'. Der Abstand zwischen dm und dm_0 heisse δ, zwischen dm und dem Schwerpunkt der Erde dagegen r', sodass

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 &= (x' - \mathfrak{x}_0)^2 + (y' - \mathfrak{y}_0)^2 + (z' - \mathfrak{z}_0)^2 \\ &= (\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)^2 + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)^2 + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wenn die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Gravitation fortpflanzt, durch $\frac{1}{\theta}$ bezeichnet wird, so ist die Zeit, zu welcher der auf dm wirkende Impuls von dm_0 ausging, gleich $t - \theta\delta$, und zu dieser Zeit waren die Coordinaten von dm_0

$$\xi_0 + \mathfrak{x}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt^3} + \ldots$$

$$\eta_0 + \mathfrak{y}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt^3} + \ldots$$

$$\zeta_0 + \mathfrak{z}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt^3} + \ldots$$

Da nun aber jedenfalls $\theta\delta$, d. h. die Zeit, während welcher die Gravitation die Strecke δ durcheilt, eine sehr kleine Grösse ist, so genügt es, nur die erste Potenz der-

selben zu berücksichtigen, d. h. für die Coordinaten von dm_0 folgende Werthe anzunehmen:

$$\xi_0 + \mathfrak{x}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt}$$

$$\eta_0 + \mathfrak{y}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt}$$

$$\zeta_0 + \mathfrak{z}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt}$$

Der Abstand zwischen dm und dem durch vorstehende Coordinaten bestimmten Orte von dm_0 ist hiernach

$$\delta - \theta\delta\left[\frac{\partial\delta}{\partial(\xi_0+\mathfrak{x}_0)} \cdot \frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial(\eta_0+\mathfrak{y}_0)} \cdot \frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)} \cdot \frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]$$

oder mit Hülfe von 2)

$$\delta + \theta\left[(\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right],$$

und hiernach wird die der ξ-Achse parallele Componente der von dm_0 auf dm geäusserten Beschleunigung:

$$-k^2 dm_0 \frac{\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0 + \theta\delta\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt}}{\left\{\delta + \theta\left[(\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]\right\}^3}$$

oder, wenn auch hier wieder θ^2, θ^3, ... vernachlässigt werden und $\xi' - \xi_0 = x'$, $\eta' - \eta_0 = y'$, $\zeta' - \zeta_0 = z'$ gesetzt wird:

$$-k^2 dm_0 \left\{\frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^3} + \frac{\theta}{\delta^2}\frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt}\right.$$

$$\left. -3\theta \cdot \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^4}\left[(x' - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (y' - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (z' - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]\right\}$$

Wir werden nun zunächst in diesen Ausdruck die von der Rotation der Erde herrührenden Werthe von $\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{y}_0}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{z}_0}{dt}$

einsetzen. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Coordinatenaxen mit φ_0, χ_0, ψ_0, so ist

$$\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} = \chi_0 \mathfrak{z}_0 - \psi_0 \mathfrak{y}_0$$

$$\frac{d\mathfrak{y}_0}{dt} = \psi_0 \mathfrak{x}_0 - \varphi_0 \mathfrak{z}_0$$

$$\frac{d\mathfrak{z}_0}{dt} = \varphi_0 \mathfrak{y}_0 - \chi_0 \mathfrak{x}_0$$

Indem wir beachten, dass

$$\mathfrak{x}_0 \frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + \mathfrak{y}_0 \frac{d\mathfrak{y}_0}{dt} + \mathfrak{z}_0 \frac{d\mathfrak{z}_0}{dt} = 0$$

ist, erhalten wir für obige Beschleunigungscomponente folgenden Werth:

$$-k^2 dm_0 \Big\{ \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^3} + \frac{\theta}{\delta^2} \frac{d\xi_0}{dt} + \frac{\theta}{\delta^2} (\chi_0 \mathfrak{z}_0 - \psi_0 \mathfrak{y}_0) \qquad 3)$$

$$-3\theta \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^4} \left[(x' - \mathfrak{x}_0) \frac{d\xi_0}{dt} + (y' - \mathfrak{y}_0) \frac{d\eta_0}{dt} + (z' - \mathfrak{z}_0) \frac{d\zeta_0}{dt} \right]$$

$$+3\theta \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^4} \left[\mathfrak{x}_0 (\chi_0 z' - \psi_0 y') + \mathfrak{y}_0 (\psi_0 x' - \varphi_0 z') + \mathfrak{z}_0 (\varphi_0 y' - \chi_0 x') \right] \Big\}$$

Um die Einwirkung der ganzen Erde zu erhalten, haben wir den Ausdruck 3) über die ganze Erdmasse m_0 zu integriren. Aus 1) und 2) folgt:

$$\delta^2 = r'^2 - 2(x' \mathfrak{x}_0 + y' \mathfrak{y}_0 + z' \mathfrak{z}_0) + \varrho_0^2,$$

woraus, wenn wir nur noch die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Mondparallaxe mitnehmen:

$$\frac{1}{\delta^n} \quad \frac{1}{r'^n} \left[1 + n \frac{x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0}{r'^2} - \frac{n}{2} \frac{\varrho_0^2}{r'^2} + \frac{n(n+2)}{2} \cdot \frac{(x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0)^2}{r'^4} \right] \quad 4)$$

Wir nehmen nun an, dass die Erde eine aus homogenen concentrischen Schalen zusammengesetzte Kugel ist, so dass der Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt und alle Durchmesser

Hauptträgheitsaxen sind. Wir haben dann nach bekannten Sätzen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{x}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{y}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0\, dm_0 = 0 \\
&\int \mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0 \mathfrak{x}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0\, dm_0 = 0 \\
&\int \mathfrak{x}_0^2\, dm_0 = \int \mathfrak{y}_0^2\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0^2\, dm_0 = \frac{A_0}{2} \\
&\int \varrho_0^2\, dm_0 = \frac{3}{2} A_0 \\
&\int (x' \mathfrak{x}_0 + y' \mathfrak{y}_0 + z' \mathfrak{z}_0)^2\, dm_0 = \frac{r'^2}{2} A_0,
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

wenn mit A_0 das Trägheitsmoment der Erde in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe bezeichnet wird.

Mit Hülfe von 4) erhalten wir hieraus folgende Relationen, in denen nicht über Glieder zweiter Ordnung hinsichtlich der Mondparallaxe hinausgegangen ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dm_0}{\delta^n} = \frac{1}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-1)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
&\int \frac{\mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} \cdot x'; \int \frac{\mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} y'; \int \frac{\mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} z' \\
&\int \frac{\mathfrak{x}_0^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{A_0}{2r'^n}; \int \frac{\mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \int \frac{\mathfrak{z}_0 \mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \int \frac{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = 0 \\
&\int \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{x'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
&\int \frac{y' - \mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{y'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
&\int \frac{z' - \mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{z'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
&\int \frac{(x' - \mathfrak{x}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{x'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n} \\
&\int \frac{(y' - \mathfrak{y}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{y'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n} \\
&\int \frac{(z' - \mathfrak{z}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{z'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n}
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{(y'-\mathfrak{y}_0)(z'-\mathfrak{z}_0)}{\delta^n}\,dm_0 &= \frac{y'z'}{r'^n}\left[m_0+\frac{n(n-5)}{4}\,\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
\int\frac{(z'-\mathfrak{z}_0)(x'-\mathfrak{x}_0)}{\delta^n}\,dm_0 &= \frac{z'x'}{r'^n}\left[m_0+\frac{n(n-5)}{4}\,\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
\int\frac{(x'-\mathfrak{x}_0)(y'-\mathfrak{y}_0)}{\delta^n}\,dm_0 &= \frac{x'y'}{r'^n}\left[m_0+\frac{n(n-5)}{4}\,\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
\int\frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{x}_0}{\delta^n}\,dm_0 &= x'^2\,\frac{n\,A_0}{2r'^{\,n+2}}-\frac{A_0}{2r'^n}\\
\int\frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{y}_0}{\delta^n}\,dm_0 &= x'y'\,\frac{n\,A_0}{2r'^{\,n+2}}\\
\int\frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{z}_0}{\delta^n}\,dm_0 &= x'z'\,\frac{n\,A_0}{2r'^{\,n+2}}
\end{aligned}\right\}\quad 6)$$

Mit Hülfe dieser Relationen erhält man als Integral von 3):

$$-k^2\left\{\frac{m_0x'}{r'^3}+\left(m_0-\frac{A_0}{r'^2}\right)\frac{\theta}{r'^2}\,\frac{d\xi_0}{dt}\right. \qquad 7)$$

$$\left.-3\left(m_0-\frac{A_0}{r'^2}\right)\theta\,\frac{x'}{r'^4}\left(x'\,\frac{d\xi_0}{dt}+y'\,\frac{d\eta_0}{dt}+z'\,\frac{d\zeta_0}{dt}\right)-\frac{A_0\theta}{2r'^4}\,(\chi_0z'-\psi_0y')\right\}$$

Wir haben hieraus die Componente der bewegenden Kraft zu berechnen, welche die Erde auf den ganzen Mond ausübt. Zu diesem Zweck ist der vorstehende Ausdruck 7) mit dem Massenelement des Mondes zu multipliciren und über die ganze Mondmasse zu integriren. Wir nennen die geocentrischen Coordinaten des Mondschwerpunktes x, y, z; die auf diesen Schwerpunkt bezogenen Coordinaten des Massenelementes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; den Abstand des letzteren vom Schwerpunkte ϱ. Dann ist in 7) einzusetzen

$$x'=x+\mathfrak{x},\ y'=y+\mathfrak{y},\ z'=z+\mathfrak{z},$$

$$r'^2=(x+\mathfrak{x})^2+(y+\mathfrak{y})^2+(z+\mathfrak{z})^2=r^2+2(x\mathfrak{x}+y\mathfrak{y}+z\mathfrak{z})+\varrho^2,$$

wo

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

$$\varrho^2=\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2.$$

Hieraus folgt nach Analogie von 4)

$$\frac{1}{r'^n} = \frac{1}{r^n}\left[1 - n\frac{x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z}}{r^2} - \frac{n}{2}\frac{\varrho^2}{r^2} + \frac{n(n+2)}{2}\frac{(x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z})^2}{r^4}\right],$$

wobei Glieder von der dritten Ordnung in Bezug auf den scheinbaren Mondradius vernachlässigt sind.

Man kann hieraus eine Anzahl von Reductionsgleichungen herleiten, die, vom Vorzeichen der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ abgesehen, den Formeln 5) und 6) analog sind, wobei der Mond, wie vorher die Erde, als eine aus concentrischen homogenen Schalen zusammengesetzte Kugel angesehen wird, deren Gesammtmasse m und deren Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe A heissen möge.

Durch Integration erhält man demnach aus 7):

$$-k^2\left\{\frac{m m_0}{r^3}x + \left(m m_0 - \frac{m A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi_0}{dt}\right. \qquad 8)$$

$$\left. -3\left(m m_0 - \frac{m A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi_0}{dt} + y\frac{d\eta_0}{dt} + z\frac{d\zeta_0}{dt}\right) - \frac{m A_0 \theta}{2 r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)\right\}$$

wobei die Producte der Trägheitsmomente vernachlässigt sind.

Dies ist die ξ-Componente der bewegenden Kraft, welche die Erde auf den Schwerpunkt des Mondes ausübt. Für den Einfluss der Sonne kommt natürlich ein ähnliches Glied hinzu, in welchem wir folgende Bezeichnungen anwenden wollen:

Es sei m_1 die Masse, A_1 das auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe bezogene Trägheitsmoment der Sonne, welche wir wie Erde und Mond als eine aus homogenen concentrischen Schalen zusammengesetzte Kugel ansehen. Die Coordinaten des Schwerpunktes (Mittelpunktes) in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem seien ξ_1, η_1, ζ_1, die geocentrischen Coordinaten desselben Punktes x_1, y_1, z_1; der Abstand der Mittelpunkte von Erde und Sonne heisse r_1.

Die heliocentrischen Coordinaten des Mondmittelpunktes werden demnach $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$. Der Abstand des letzteren vom Sonnenmittelpunkte heisse $\varDelta$. Endlich seien φ_1, χ_1, ψ_1 die Winkelgeschwindigkeiten der Sonnenrotation um die drei Coordinatenaxen.

Hiernach wird die Componente der von Erde und Sonne auf den Mond ausgeübten bewegenden Kraft, wenn wir für den Augenblick die auf das feste Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Mondmittelpunktes ξ, η, ζ nennen:

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi}{dt^2} = &- k^2\Big\{\frac{m\,m_0}{r^3}x + \left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi_0}{dt} \\
&- 3\left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi_0}{dt} + y\frac{d\eta_0}{dt} + z\frac{d\zeta_0}{dt}\right) \\
&- \frac{m\,A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)\Big\} \\
&- k^2\Big\{\frac{m\,m_1}{\varDelta^3}(x - x_1) + \left(m\,m_1 - \frac{m\,A_1 + m_1\,A}{\varDelta^2}\right)\frac{\theta}{\varDelta^2}\frac{d\xi_1}{dt} \\
&- 3\left(m\,m_1 - \frac{m\,A_1 + m_1\,A}{\varDelta^2}\right)\frac{\theta(x - x_1)}{\varDelta^4}\left((x-x_1)\frac{d\xi}{dt} + (y-y_1)\frac{d\eta}{dt} + (z-z_1)\frac{d\zeta}{dt}\right) \\
&- \frac{m\,A_1}{2}\frac{\theta}{\varDelta^4}\big(\chi_1(z - z_1) - \psi_1(y - y_1)\big)\Big\} \qquad 9)
\end{aligned}$$

Da wir nun die geometrische Bewegung des Mondes zu untersuchen haben, so muss auch $\frac{d^2\xi_0}{dt^2}$ gebildet und von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ abgezogen werden, wodurch $\frac{d^2x}{dt^2}$ erhalten wird.

Man findet, wenn φ, χ, ψ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit der Mondrotation bedeuten:

$$\begin{aligned}
m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = &- k^2\Big\{-\frac{m\,m_0}{r^3}x + \left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi}{dt} \\
&- 3\left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi}{dt} + y\frac{d\eta}{dt} + z\frac{d\zeta}{dt}\right) \\
&+ \frac{m_0\,A}{2}\cdot\frac{\theta}{r^4}(\chi z - \psi y)\Big\}
\end{aligned}$$

$$- k^2 \left\{ - \frac{m_0 m_1}{r_1^3} x_1 + \left(m_0 m_1 - \frac{m_0 A_1 + m_1 A_0}{r_1^2} \right) \frac{\theta}{r_1^2} \frac{d\xi_1}{dt} \right.$$

$$- 3 \left(m_0 m_1 - \frac{m_0 A_1 + m_1 A_0}{r_1^2} \right) \frac{\theta x_1}{r_1^4} \left(x_1 \frac{d\xi_1}{dt} + y_1 \frac{d\eta_1}{dt} + z_1 \frac{d\zeta_1}{dt} \right)$$

$$\left. + \frac{m_0 A_1}{2} \cdot \frac{\theta}{r_1^4} (\chi_1 z_1 - \psi_1 y_1) \right\} \tag{10}$$

Bildet man nun aus 9) und 10) die Differenz

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_0}{r^3} x = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + X, \tag{11}$$

wo

$$\Omega = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right) \tag{12}$$

In dem Ausdrucke für X, der alle mit θ multiplicirten Glieder umfasst, wollen wir für die Componenten der absoluten Geschwindigkeiten der Sonne constante Werthe annehmen, indem wir setzen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \alpha \;, \; \frac{d\eta_1}{dt} = \beta \;, \; \frac{d\xi_1}{dt} = \gamma.$$

Dies ist allerdings nicht völlig streng; denn wenn die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes des ganzen Systems die constanten Werthe α, β, γ haben, so ist

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \left(1 + \frac{m_0}{m_1} + \cdot \cdot \right) \alpha - \frac{m_0}{m_1} \frac{d\xi_0}{dt} - \cdot \cdot ,$$

wo jeder Planet zu berücksichtigen ist. Setzen wir in X einfach $\frac{d\xi_1}{dt} = \alpha$, so vernachlässigen wir damit entweder Glieder von der Ordnung der Producte der Planetenmassen oder von der Ordnung des Quotienten einer Planetenmasse dividirt durch r_1^4. Beide Vernachlässigungen bedürfen keiner Rechtfertigung.

Ferner beachten wir, dass

$$\xi_0 = \xi_1 - x_1,\ \eta_0 = \eta_1 - y_1,\ \zeta_0 = \zeta_1 - z_1;$$
$$\xi = \xi_1 + x - x_1,\ \eta = \eta_1 + y - y_1,\ \zeta = \zeta_1 + z - z_1.$$

Hiernach findet sich

$$\left.\begin{aligned}
X \quad & -k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m m_0 r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\alpha - k^2 m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{m m \varDelta^2}\right)\frac{\theta}{\varDelta^2}\alpha \\
& \qquad + k^2 m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0 m_1 r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}\alpha \\
& + k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m m_0 r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dr_1}{dt} + k^2 m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m_0 m r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dx}{dt} \\
& + 3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m m_0 r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& - 3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m m_0 r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{dx_1}{dt}+y\frac{dy_1}{dt}+z\frac{dz_1}{dt}\right) \\
& - 3k^2 m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m m_0 r^2}\right)\frac{\theta x}{r^3}\frac{dr}{dt} \\
& + 3k^2 m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{m m_1 \varDelta^2}\right)\frac{\theta(x-x_1)}{\varDelta^4}[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)] \\
& - 3k^2 m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0 m_1 r_1^2}\right)\frac{\theta x_1}{r_1^4}(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) \\
& + \frac{k^2A}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi z-\psi y) + \frac{k^2A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi_0 z-\psi_0 y) \\
& - \frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\varDelta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)(\chi_1 z_1-\psi_1 y_1) + \frac{k^2A_1}{2}\frac{\theta}{\varDelta^4}(\chi_1 z-\psi_1 y)
\end{aligned}\right\}\ 13)$$

Durch cyklische Vertauschung innerhalb der drei Buchstabengruppen x, y, z; α, β, γ; φ, χ, ψ erhält man aus X auch die Componenten Y und Z der von der nicht momentanen Fortpflanzung der Gravitation herrührenden störenden Kraft.

Die Differentialgleichungen der geocentrischen Bewegung des Mondes lauten also:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 (m + m_0) \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} + X \\
\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 (m + m_0) \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} + Y \\
\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 (m + m_0) \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} + Z
\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Wir werden dieselben jedoch für unsere Zwecke transformiren. Zunächst erhalten wir leicht

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - 2k^2 \frac{m + m_0}{r} + k^2 \frac{m + m_0}{a} \qquad 15)$$

$$= 2\int\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz\right) + 2\int (X dx + Y dy + Z dz).$$

wo $k^2 \frac{m + m_0}{a}$ die Integrationsconstante ist und die Integrale als untere Grenze die Osculationsepoche haben.

Ferner geben die Gleichungen 14)

$$\frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_0}{r} = \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + z \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)$$

$$+ (xX + yY + zZ) \qquad 16)$$

Weil nun aber $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, also

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r^2)}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + \frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2},$$

so erhält man durch Addition von 15) und 16)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r^2)}{dt^2} - k^2 \frac{m + m_0}{r} + k^2 \frac{m + m_0}{a}$$

$$= 2\int\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz\right) + \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + z \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)$$

$$+ 2\int (X dx + Y dy + Z dz) + (xX + yY + zZ)$$

Betrachten wir allein die durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation hervorgebrachte Störung, so erhalten wir, wenn δ jene Störung andeutet:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2 \frac{m+m_0}{r^3}(r\delta r) \tag{17}$$

$$= 2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right) + \delta\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$

$$+ 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (xX + yY + zZ)$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von Ω lässt sich indessen diese Gleichung noch auf eine andere Form bringen.

Da bis zu den Gliedern von der Ordnung $\frac{r^2}{r_1^3}$ incl.

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_1}\left[1 + \frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{3}{2}\frac{(xx_1+yy_1+zz_1)^2}{r_1^4}\right],$$

so ist

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{3}{2}\frac{(xx_1+yy_1+zz_1)^2}{r_1^4}\right],$$

oder, da das Glied $\frac{k^2 m_1}{r_1}$ weder zu $\delta\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$, noch zu $2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right)$ einen Beitrag liefert:

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[\frac{3}{2}\frac{(xx_1+yy_1+zz_1)^2}{r_1^4} - \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r^2}\right].$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[3\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^4}\cdot x_1 - \frac{x}{r_1^2}\right],$$

und analog $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$.

Ferner:

$$x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z} = r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = 2\Omega$$

Mit Rücksicht auf das Spätere sollen hier an Stelle der geocentrischen Coordinaten x_1, y_1, z_1, r_1 der Sonne die auf den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond bezogenen Sonnen-

coordinaten x_0, y_0, z_0, r_0 eingeführt werden. Man findet sofort:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot x \\
y_1 &= y_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot y \\
z_1 &= z_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot z.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Bezeichnen wir den Factor $\frac{m}{m+m_0}$, der etwa $\frac{1}{81}$ beträgt, durch ε und vernachlässigen ε^2, ε^3 . ., so finden wir

$$
\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{3}{2}\frac{(x x_0 + y y_0 + z z_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}\right]
$$

$$
+ \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{9}{2}\frac{x x_0 + y y_0 + z z_0}{r_0^4} \cdot r^2 - \frac{15}{2}\frac{(x x_0 + y y_0 + z z_0)^3}{r_0^6}\right]\varepsilon
$$

$$
\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\,\frac{x x_0 + y y_0 + z z_0}{r_0^4} \cdot x_0 - \frac{x}{r_0^2}\right]
$$

$$
+ \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\,\frac{r^2 x_0}{r_0^4} + 6\,\frac{x x_0 + y y_0 + z z_0}{r_0^4} - \frac{15 (x x_0 + y y_0 + z z_0)^2}{r_0^6}\right]\varepsilon.
$$

Analog $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$.

Wie man sieht sind die mit ε behafteten Glieder von einer höheren Ordnung als die letzten, welche wir bei der Entwickelung noch berücksichtigen wollten, weshalb wir innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze haben:

$$
\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{3}{2}\frac{(x x_0 + y y_0 + z z_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}\right]
$$

$$
\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\,\frac{x x_0 + y y_0 + z z_0}{r_0^4} \cdot x_0 - \frac{x}{r_0^2}\right].
$$

Hiernach darf man also in der Störungsfunction und ihren Ableitungen die geocentrischen Coordinaten der Sonne durch die auf den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond bezogenen (barycentrischen) Sonnencoordinaten ersetzen.

Wir führen nun ein

$$x = r\cos\beta\cos\lambda \qquad x_0 = r_0\cos\beta_0\cos\lambda_0$$
$$y = r\cos\beta\sin\lambda \qquad y_0 = r_0\cos\beta_0\sin\lambda_0$$
$$z = r\sin\beta \qquad z_0 = r_0\sin\beta_0$$

wo λ und β die geocentrische Länge und Breite des Mondes, λ_0 und β_0 die barycentrische Länge und Breite der Sonne sind. Es ergiebt sich

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{4}\frac{r^2}{r_0^3}[3\cos^2\beta - 2 + 3\cos^2\beta\cos(2\lambda - 2\lambda_0) + 3\sin 2\beta\sin 2\beta_0\cos(\lambda - \lambda_0)],$$

wo bereits die zweite Potenz der Sonnenbreite β_0 vernachlässigt ist. Da jedoch die Störungsfunction schon einen starken Verkleinerungsfactor hat, so werden wir hier auch das Quadrat der Mondbreite sowie das Product der Breiten von Sonne und Mond vernachlässigen, so dass einfach

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{4}\frac{r^2}{r_0^3}[1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_0)]. \tag{19}$$

Da

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial z_0}dz_0 = d\Omega$$

und

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial z_0}dz_0 = \frac{\partial\Omega}{\partial r_0}dr_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}d\lambda_0,$$

so nimmt Gleichung 17) folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2\frac{m + m_0}{r^3}(r\delta r) = 4\delta\Omega - 2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}dr_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}d\lambda_0\right) + 2\int(X dx + Y dy + Z dz) + (xX + yY + zZ)$$

oder, da

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{k^2 m_1}{2}\frac{r}{r_0^3}[1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_0)],$$

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2 \left\{\frac{m+m_0}{r^3} - \frac{2m_1}{r_0^3}[1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_0]\right\} r\delta r$$

$$= 4\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + 4\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}\delta r_0 + 4\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}\delta\lambda_0$$

$$-2\int\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}d\delta r_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}d\delta\lambda_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial r_0}dr_0\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_0}dr_0\delta\lambda\right.$$

$$+\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0^2}dr_0\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0\partial\lambda_0}dr_0\delta\lambda_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta\lambda$$

$$\left.+\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda_0^2}d\lambda_0\delta\lambda_0\right\} \tag{20}$$

$$+2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (xX + yY + zZ)$$

Die beiden ersten Gleichungen 14) geben

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = \left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + (xY - yX)$$

$$= \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + (xY - yX)$$

Da nun $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = r^2\cos^2\beta\,\frac{d\lambda}{dt}$, so hat man

$$r^2\cos^2\beta\,\frac{d\lambda}{dt} = \text{Const.} + \int\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \int(xY - yX)\,dt,$$

wo die Integrationen von der Osculationsepoche beginnen.

Hinsichtlich der von der endlichen Geschwindigkeit der Gravitation herrührenden Störung hat man demnach

$$r^2\cos^2\beta\,\frac{d\delta\lambda}{dt} + 2\frac{d\lambda}{dt}\,r\cos\beta\,\delta(r\cos\beta)$$

$$= \delta\int\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \int(xY - yX)\,dt.$$

Mit Vernachlässigung der zweiten Potenz der Mondbreite kann man diese Gleichung schreiben

$$r^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2\frac{d\lambda}{dt}(r\delta r) + \int\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda}\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\delta\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_0}\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_0}\delta\lambda_0\right)dt$$

$$+\int(xY - yX)\,dt \tag{21}$$

Eine scharfe Integration der Gleichungen 20) und 21) müsste natürlich durch abwechselnde Annäherungen erfolgen.

Die in den entwickelten Gleichungen auftretenden partiellen ersten und zweiten Differentialquotienten der Störungsfunction Ω sind innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenzen die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} &= -\frac{3}{2}\, k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial \Omega}{\partial r_1} &= -\frac{3}{4}\, k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)] \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1} &= +\frac{3}{2}\, k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial r_1} &= -\frac{3}{2}\, k^2 m_1 \frac{r}{r_1^4} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)] \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial r_1} &= +\frac{9}{2}\, k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2_1} &= +3\, k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^5} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)] \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_1 \partial \lambda_1} &= -\frac{9}{2}\, k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial \lambda_1} &= +3 k^2 m_1 \frac{r}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial \lambda_1} &= +3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda_1^2} &= -3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial \lambda} &= -3 k^2 m_1 \frac{r}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} &= -3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1)
\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Ferner ergiebt sich aus 13) und den analogen Ausdrücken für Y und Z:

$$xX+yY+zZ=2k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

$$-2k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdx_1+ydy_1+zdz_1}{dt}$$

$$-2k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$-k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

$$+k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

$$23)\qquad +3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(r^2-xx_1-yy_1-zz_1)$$

$$\times[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)]$$

$$-3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(xx_1+yy_1+zz_1)$$

$$\times(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)$$

$$-\frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[\varphi_1(zy_1-yz_1)+\chi_1(xz_1-zx_1)$$

$$+\psi_1(yx_1-xy_1)]$$

$$xY-yX=k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha y-\beta x)$$

$$+k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha y-\beta x)$$

$$24)\qquad -k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha y-\beta x)$$

$$+k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdy_1-ydx_1}{dt}$$

$$+k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdy-ydx}{dt}$$

$$-3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(xy_1-yx_1)[\alpha(x-x_1)$$

$$+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)]$$

$$-3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(xy_1-yx_1)(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)$$

$$+\frac{k^2A}{2}\frac{\theta}{r^4}[x(\psi x-\varphi z)-y(\chi z-\psi y)]$$

$$+\frac{k^2 A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}[x(\psi_0 x-\varphi_0 z)-y(\chi_0 z-\psi_0 y)]$$

$$-\frac{k^2 A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[x(\psi_1 x_1-\varphi_1 z_1)-y(\chi_1 z_1-\psi_1 y_1)]$$

$$+\frac{k^2 A_1}{2}\frac{\theta}{\Delta^4}[x(\psi_1 x-\varphi_1 z)-y(\chi_1 z-\psi_1 y)]$$

$$\begin{aligned}
Xdx+Ydy+Zdz=&-k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\\
&-k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\\
&+k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\\
&+k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dx dx_1+dy dy_1+dz dz_1}{dt}\\
&+k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt}\\
&+3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^3}dr(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\
&-3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^3}dr\frac{xdx_1+ydy_1+zdz_1}{dt}\\
&-3k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2dt\\
&+3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(rdr-x_1dx-y_1dy-z_1dz)\\
&\qquad\times[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)]\\
&-3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(x_1dx+y_1dy+z_1dz)\\
&\qquad\times(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)\\
&+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\varphi+A_0\varphi_0}{r^4}+\frac{A_1\varphi_1}{\Delta^4}\right)(ydz-zdy)\\
&+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\chi+A_0\chi_0}{r^4}+\frac{A_1\chi_1}{\Delta^4}\right)(zdx-xdz)\\
&+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{r^4}+\frac{A_1\psi_1}{\Delta^4}\right)(xdy-ydx)\\
&-\frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[\varphi_1(y_1dz-z_1dy)\\
&+\chi_1(z_1dx-x_1dz)+\psi_1(x_1dy-y_1dx)]
\end{aligned}\tag{25}$$

II. Die Störungen der Planetenbewegung.

In den Differentialgleichungen 20) und 21) treten die Störungen δr_0 und $\delta \lambda_0$ auf, d. h. die von der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation herrührenden Störungen des Abstandes der Sonne von dem Schwerpunkte des Systems Erde-Mond und der auf diesen Punkt bezogenen Sonnenlänge. Diese Störungen sind natürlich identisch mit denen der heliocentrischen Coordinaten jenes Schwerpunktes. Zur Berechnung dieser lassen sich die bereits entwickelten Differentialgleichungen nach einer entsprechenden Vereinfachung benutzen. Setzen wir nämlich in 9) und 10) $m_1 = 0$, so erhalten wir die Bewegung der Masse m in Bezug auf die Centralmasse m_0. Ist diese Masse ein System von Massenpunkten, so sind diese im Schwerpunkt vereinigt zu denken. Für diese setzen wir $\frac{d\xi_0}{dt} = \alpha$, $\frac{d\eta_0}{dt} = \beta$, $\frac{d\zeta_0}{dt} = \gamma$, wo α, β, γ constant sind. Hierbei sind offenbar Glieder von der Ordnung der Masse m vernachlässigt, welche wir als ausserordentlich klein im Verhältniss zu m_0 betrachten. Wir werden deshalb überhaupt Glieder mit dem Factor m weglassen.

Hiernach wird

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha + \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \beta + \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma + \frac{dz}{dt}$$

Unter Mitnahme der Hauptglieder erhalten wir somit:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2 \left\{\frac{m_0}{r^3}x + \frac{m_0\theta\alpha}{r^2} - 3m_0\frac{\theta x}{r^4}(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \frac{A_0\theta}{2}(\chi_0 z - \psi'_0 y)\right\}$$

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = +\frac{k^2 m x}{r^3}.$$

Die Subtraction ergiebt

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + k^2 (m_0 + m) \frac{x}{r^3} = - k^2 \theta m_0 \frac{\alpha}{r^2}$$

$$+ 3 k^2 \theta m_0 (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{x}{r^4} + \frac{k^2 \theta A_0}{2 r^4} (\chi_0 z - \psi_0 y)$$

Unter dem Centralkörper wollen wir jetzt die Sonne verstehen, so dass $m_0 = 1$ gesetzt werden kann.

Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} X &= - k^2 \theta \frac{\alpha}{r^2} + 3 k^2 \theta (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{x}{r^4} + \frac{k^2 \theta A_0}{2 r^4} (\chi_0 z - \psi_0 y) \\ Y &= - k^2 \theta \frac{\beta}{r^2} + 3 k^2 \theta (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{y}{r^4} + \frac{k^2 \theta A_0}{2 r^4} (\psi_0 x - \varphi_0 z) \\ Z &= - k^2 \theta \frac{\gamma}{r^2} + 3 k^2 \theta (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{z}{r^4} + \frac{k^2 \theta A_0}{2 r^4} (\varphi_0 y - \chi_0 x), \end{aligned}\right\} 26)$$

so werden die Differentialgleichungen der heliocentrischen Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} + k^2 (1 + m) \frac{x}{r^3} &= X \\ \frac{d^2 y}{d t^2} + k^2 (1 + m) \frac{y}{r^3} &= Y \\ \frac{d^2 z}{d t^2} + k^2 (1 + m) \frac{z}{r^3} &= Z \end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

Aus diesen Gleichungen folgt in bekannter Weise, wenn $\frac{k^2 (1 + m)}{a}$ eine Integrationsconstante bedeutet,

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d t^2} - \frac{2 k^2 (1 + m)}{r} + \frac{k^2 (1 + m)}{a} = 2 \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

wo von der Osculationsepoche an zu integriren ist.

Ferner folgt aus 27)

$$\frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{d t^2} + \frac{k^2 (1 + m)}{r} = x X + y Y + z Z;$$

mithin, weil

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r^2)}{d t^2} = \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d t^2} + \frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{d t^2},$$

ergeben die obigen Gleichungen durch Addition

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{k^2(1+m)}{r} + \frac{k^2(1+m)}{a} = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$
$$+ (xX + yY + zZ).$$

Bezeichnet δr die von der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation herrührende Störung des Radiusvectors, so ergiebt vorstehende Gleichung:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{(r\delta r)}{r^3} = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$
$$+ (xX + Yy + zZ). \qquad 28)$$

Wir suchen zweitens eine Gleichung, welche die Störung der in der xy-Ebene gezählten wahren Länge λ giebt.

Man hat aus 27)

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = xY - yX;$$

also, wenn man von der Osculationsepoche an integrirt und für diese Parameter und Neigung der Bahn gegen die xy-Ebene mit p und i bezeichnet,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = k\sqrt{p(1+m)}\cos i + \int(xY - yX)\,dt.$$

Setzt man zur Abkürzung die Projection von r auf die xy-Ebene gleich ϱ, so hat man also

$$\varrho^2\frac{d\lambda}{dt} = k\sqrt{p(1+m)}\cdot\cos i + \int(xY - yX)\,dt.$$

Für die Störung $\delta\lambda$ hat man demnach die Differentialgleichung

$$\varrho^2\frac{d\delta\lambda}{dt} + 2\frac{d\lambda}{dt}\varrho\delta\varrho = \int(xY - yX)\,dt.$$

Da nun $\delta\varrho$ von der Ordnung der Grösse θ ist, so kann man statt $\frac{d\lambda}{dt}$ den ungestörten Werth

$$\frac{k\sqrt{p(1+m)}}{\varrho^2}\cdot\cos i$$

einsetzen, so dass

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2k\sqrt{p(1+m)}}{\varrho^4}\cos i\,(\varrho\delta r) + \frac{1}{\varrho^2}\int(xY - yX)\,dt. \quad 29)$$

Da

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2,$$

so ist

$$\varrho\delta\varrho = r\delta r - z\delta z.$$

Man wird demnach auch δz zu berechnen haben. Aus der dritten Gleichung 27) ergiebt sich sofort

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{\delta z}{r^3} = 3k^2(1+m)z\frac{(r\delta r)}{r^5} + Z. \quad 30)$$

Wir wenden uns zunächst zu der Störungsgleichung für δr. Man findet

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = &-\frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} \\ &+ \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}[\varphi_0(ydz - zdy) \\ &+ \chi_0(zdx - xdz) + \psi'_0(xdy - ydx)] \end{aligned}$$

Nun ist, wenn ☊ die Knotenlänge, i die Neigung der Bahn gegen die xy-Ebene, p den Parameter bedeutet,

$$\begin{aligned} ydz - zdy &= k\sqrt{p(1+m)}\sin i\sin\Omega\,dt \\ zdx - xdz &= -k\sqrt{p(1+m)}\sin i\cos\Omega\,dt \\ xdy - ydx &= k\sqrt{p(1+m)}\cos i\,dt, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = &-\frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} \\ &+ \frac{k^3\theta A_0\sqrt{p}}{2r^4}[\varphi_0\sin i\sin\Omega - \chi_0\sin i\cos\Omega \\ &+ \psi'_0\cos i]\,dt. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne mit ω_0, die Neigung und Knotenlänge des Sonnenäquators in Bezug auf die xy-Ebene mit J_0 und K_0, so ist

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \omega_0 \sin J_0 \sin K_0 \\ \chi_0 &= -\omega_0 \sin J_0 \cos K_0 \\ \psi_0 &= \omega_0 \cos J_0, \end{aligned}$$

wodurch die letzte Klammergrösse wird

$$\omega_0 [\sin J_0 \sin i \cos (K_0 - \Omega) + \cos J_0 \cos i] = \omega_0 \cos N_0,$$

wenn N_0 die Neigung des Sonnenäquators gegen die Planetenbahn bezeichnet. Hierdurch wird

$$X dx + Y dy + Z dz = -\frac{k^2 \theta}{r^2} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$
$$+ 3 k^2 \theta (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{dr}{r^3} + \frac{1}{2} k^3 \theta A_0 \omega_0 \sqrt{p} \cos N_0 \frac{dt}{r^4}$$

Nun ist

$$\int \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{r^2} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^2} + 2 \int (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{dr}{r^3},$$

mithin

$$\int_0^t (X dx + Y dy + Z dz) = -k^2 \theta \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^2} + k^2 \theta \int_0^t (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{dr}{r^3}$$
$$+ \frac{1}{2} k^3 \theta A_0 \omega_0 \sqrt{p} \cos N_0 \int_0^t \frac{dt}{r^4}$$
$$+ k^2 \theta \frac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0}{r_0^3},$$

wo die Integrale als untere Grenze die Osculationsepoche $t = 0$ haben, und x_0, y_0, z_0, r_0 für diese Zeit gelten.

Ist u das Argument der Breite, so findet man leicht

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r (\alpha' \cos u + \beta' \sin u),$$

wo wie in A. N. 2630

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos \Omega + \beta \sin \Omega \\ \beta' &= -\alpha \sin \Omega \cos i + \beta \cos \Omega \cos i + \gamma \sin i. \end{aligned}$$

Da ferner $u = v + \omega$, wenn v die wahre Anomalie, ω den Bogenabstand des Perihels vom Knoten bedeutet, so ist auch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r\,(\alpha'' \cos v + \beta'' \sin v),$$

wo

$$\alpha'' = \quad \alpha' \cos \omega + \beta' \sin \omega$$
$$\beta'' = - \alpha' \sin \omega + \beta' \cos \omega.$$

Demnach ist

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\frac{dr}{r^3} = \alpha'' \int \cos v\,\frac{dr}{r^2} + \beta'' \int \sin v\,\frac{dr}{r^2}.$$

Diese Integrationen sind leicht auszuführen.

Da nämlich $dr = k\sqrt{\frac{1+m}{p}} \cdot e \sin v\, dt$, wo e die Excentricität bedeutet, so ist

$$\int \cos v\,\frac{dr}{r^2} = \frac{ek}{2}\sqrt{\frac{1+m}{p}}\int \frac{\sin 2v}{r^2}\,dt = \frac{e}{2p}\int \sin 2v\,dv = -\frac{e}{4p}\cos 2v$$

$$\int \sin v\,\frac{dr}{r^2} = \frac{ek}{2}\sqrt{\frac{1+m}{p}}\int \frac{1-\cos 2v}{r^2}\,dt = \frac{e}{2p}\int (1-\cos 2v)\,dv = \frac{e}{4p}(2v - \sin 2v).$$

Mithin

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\frac{dr}{r^3} = -\frac{e}{4p}(\alpha'' \cos 2v + \beta'' \sin 2v - 2\beta'' v) + \text{Const.}$$

Endlich ist

$$\int \frac{dt}{r^4} = \frac{1}{k\sqrt{p\,(1+m)}}\int \frac{dv}{r^2} = \frac{1}{k p^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+m}}\int (1 + e \cos v)^2\,dv$$

$$= \frac{1}{k p^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+m}}\int \left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e \cos v + \frac{e^2}{2}\cos 2v\right) dv$$

$$= \frac{1}{k p^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+m}}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) v + 2e \sin v + \frac{e^2}{4}\sin 2v\right] + \text{Const.}$$

Hiernach wird

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = &- k^2\theta \frac{\alpha'' \cos v + \beta'' \sin v}{r^2} \\
&- \frac{k^2\theta e}{4p}(\alpha'' \cos 2v + \beta'' \sin 2v - 2\beta'' v) \\
&+ \frac{k^2\theta A_0 \omega_0 \cos N_0}{2p^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) v \right. \\
&\left. + 2e \sin v + \frac{e^2}{4} \sin 2v\right] \\
&+ k^2\theta \frac{\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0}{r_0^2} \\
&+ \frac{k^2\theta e}{4p}(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 + 2\beta'' v_0) \\
&- \frac{k^2\theta A_0 \omega_0 \cos N_0}{2p^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) v_0 \right. \\
&\left. + 2e \sin v_0 + \frac{e^2}{4} \sin 2v_0\right].
\end{aligned} \tag{31}
$$

In 28) tritt auch die Grösse $xX + yY + zZ$ auf. Wir finden leicht

$$
\begin{aligned}
xX + yY + zZ &= 2k^2\theta \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^2} \\
&= 2k^2\theta \frac{\alpha'' \cos v + \beta'' \sin v}{r}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Setzt man nun 31) und 32) in 28) ein, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{r\delta r}{r^3} = &- \frac{k^2\theta e}{2p}(\alpha'' \cos 2v + \beta'' \sin 2v - 2\beta'' v) \\
&+ \frac{k^2\theta A_0 \omega_0 \cos N_0}{p^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) v \right. \\
&\left. + 2e \sin v + \frac{e^2}{4} \sin 2v\right] \\
&+ C,
\end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
C = 2k^2\theta \frac{\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0}{r_0^2} + \frac{k^2\theta e}{2p}(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 - 2\beta'' v_0) \\
- \frac{k^2\theta A_0 \omega_0 \cos N_0}{p^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) v_0 + 2e \sin v_0 + \frac{e^2}{4} \sin 2v_0\right]
\end{aligned}
$$

Setzen wir ferner

$$D = \frac{k^2\theta}{p}\left(e\beta'' + \frac{A_0\omega_0\cos N_0}{p}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\right)$$
$$E = \frac{2k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{p^2},$$
$$F = -\frac{k^2\theta}{2p}\left((\beta'' - \frac{A_0\omega_0\cos N_0}{p}\,\frac{e}{2}\right)$$
$$G = -\frac{k^2\theta}{2p}\alpha'',$$

so nimmt die Differentialgleichung für δr folgende Gestalt an

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{r\delta r}{r^3} \tag{33}$$
$$= C + Dv + Ee\sin v + Fe\sin 2v + Ge\cos 2v.$$

Der Umstand, dass diese Differentialgleichung auf der rechten Seite nur die Variable v enthält, ist ein Fingerzeig, dass man diese vortheilhaft als unabhängige Variable gebrauchen kann.

Mit Zugrundelegung der für die ungestörte Bewegung geltenden Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{r^2},\quad \frac{dr}{dt} = k\sqrt{\frac{1+m}{p}}\,e\sin v,$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k^2(1+m)e\cos v}{r^2},\quad r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

erhält man, wenn man $1+m=1\ldots$ setzt,

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\delta r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\delta r}{dt} + r\frac{d^2\delta r}{dt^2}$$
$$= \frac{k^2e\cos v}{r^2}\delta r + \frac{2k^2e\sin v}{r^2}\frac{d\delta r}{dv} + r\left(\frac{k^2p}{r^4}\frac{d^2\delta r}{dv^2} - \frac{2k^2e\sin v}{r^3}\frac{d\delta r}{dv}\right)$$
$$= \frac{k^2p}{r^3}\left(\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \frac{er\cos v}{p}\delta r\right) = \frac{k^2p}{r^3}\left(\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \delta r - \frac{r}{p}\delta r\right).$$

Setzt man dies in 33) ein, so ergiebt sich

$$\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \delta r = \frac{r^3}{k^2p}(C + Dv + Ee\sin v \tag{34}$$
$$+ Fe\sin 2v + Ge\cos 2v) = W.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v + \sin v \int \cos v\, W dv$$
$$- \cos v \int \sin v\, W dv. \qquad 35)$$

Die Berechnung dieses Ausdruckes erfordert folgende Integrationen:

$$\int r^3 \cos v\, dv \qquad \int r^3 \sin v\, dv$$
$$\int r^3 v \cos v\, dv \qquad \int r^3 v \sin v\, dv$$
$$\int r^3 \sin v \cos v\, dv \qquad \int r^3 \sin^2 v\, dv$$
$$\int r^3 \sin 2v \cos v\, dv \qquad \int r^3 \sin 2v \sin v\, dv$$
$$\int r^3 \cos 2v \cos v\, dv \qquad \int r^3 \cos 2v \sin v\, dv.$$

Diese Integrale lassen sich meist ohne grosse Mühe in geschlossener Form erhalten, nämlich

$$\int r^3 \cos v\, dv = a^3 \sqrt{1-e^2} \left[\left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E - \frac{3}{2} e \mu t \right]$$

(μ = mittlere Bewegung, E = exc. Anomalie.)

$$\int r^3 \sin v \cos v\, dv = a^3 (1 - e^2) \left[e \cos E - \frac{1}{4} \cos 2E \right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \cos v\, dv = \frac{2p}{e^3} \left[p^2 \log \text{nat}\, r - 2pr + \frac{r^2}{2} \right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \cos v\, dv = \frac{2p^3}{e^3} v - \frac{2a^3}{e^3} \sqrt{1-e^2} \left(4 - \frac{11}{2} e^2 + 3e^4\right) E$$
$$+ \frac{6a^3}{e^3} \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 \mu t + \frac{4a^3}{e^2} \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right) \sin E$$
$$- \frac{a^3 \sqrt{1-e^2}}{2e} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \sin 2E$$

$$\int r^3 \sin v\, dv = \frac{p}{2e} r^2$$

$$\int r^3 v \sin v\, dv = \frac{p}{2e} (r^2 v - a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \mu t)$$

$$\int r^3 \sin^2 v\, dv = \frac{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4} (2E - \sin 2E)$$

$$\int r^3 \sin 2v \sin v \, dv = \frac{2a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2} \left[\left(\frac{1}{e} - \frac{3}{2} e \right) E - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e} v \right.$$
$$\left. + (1-e^2) \sin E + \frac{e}{4} \sin 2E \right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \sin v \, dv = \frac{p}{2e} r^2 \cos 2v + \frac{2p^2}{e^2} \left(a \cos E + \frac{p}{e} \log \text{nat}\, r \right)$$

Die Benutzung dieser Ausdrücke würde aber eine wenig übersichtliche Form für die Störung δr ergeben, und wir ziehen es deshalb vor, die Integrale nach Potenzen von e zu entwickeln, wobei wir nur die Anfangsglieder zu kennen brauchen.

Da $r^3 = p^3 (1 - 3e \cos v \ldots)$ ist, so findet man leicht

$$\int r^3 \cos v \, dv = p^3 \left[-\frac{3}{2} ev + \sin v - \frac{3}{4} e \sin 2v \ldots \right]$$

$$\int r^3 v \cos v \, dv = p^3 \left[v \sin v + \cos v - \frac{3}{4} ev^2 - \frac{3}{4} ev \sin 2v - \frac{3}{8} e \cos 2v \ldots \right]$$

$$\int r^3 \sin v \cos v \, dv = p^3 \left[-\frac{1}{4} \cos 2v + \frac{3}{4} e \cos v + \frac{1}{4} e \cos 3v \ldots \right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \cos v \, dv = p^3 \left[-\frac{1}{2} \cos v - \frac{1}{6} \cos 3v + \frac{3}{4} e \cos 2v + \frac{3}{16} e \cos 4v \ldots \right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \cos v \, dv = p^3 \left[\frac{1}{2} \sin v + \frac{1}{6} \sin 3v - \frac{3}{4} ev \right.$$
$$\left. - \frac{3}{4} e \sin 2v - \frac{3}{16} e \sin 4v \ldots \right]$$

$$\int r^3 \sin v \, dv = p^3 \left[-\cos v + \frac{3}{4} e \cos 2v \ldots \right]$$

$$\int r^3 v \sin v \, dv = p^3 \left[\sin v - v \cos v - \frac{3}{8} e \sin 2v + \frac{3}{4} ev \cos 2v \ldots \right]$$

$$\int r^3 \sin^2 v \, dv = p^3 \left[-\frac{1}{4} \sin 2v + \frac{1}{2} v - \frac{3}{4} e \sin v + \frac{1}{4} e \sin 3v \ldots \right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \sin v \, dv = p^3 \left[\frac{1}{2} \sin v - \frac{1}{6} \sin 3v - \frac{3}{4} ev + \frac{3}{16} e \sin 4v \ldots \right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \sin v \, dv = p^3 \left[\frac{1}{2} \cos v - \frac{1}{6} \cos 3v + \frac{3}{16} e \cos 4v \ldots \right].$$

In einigen dieser Integrale tritt v ausserhalb des Sinus und Cosinus auf; diese Glieder sind in dem zweiten und siebenten Integrale allerdings nicht vollständig angegeben, jedoch sind sie deshalb nicht von Bedeutung, weil sie mit höheren Potenzen von e multiplicirt sind und ausserdem periodische Factoren haben; v tritt in diesen nur in der ersten Potenz auf. Dagegen tritt v^2 nur in dem zweiten Integrale auf, und zwar ohne periodischen Factor. Die Vernachlässigung von e^2, e^3 ... ist daher berechtigt, da die wichtigsten der säcularen Glieder mitberücksichtigt sind.

Nun ist

$$\begin{aligned}\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v &+ \frac{C}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \cos v\, dv - \cos v \int r^3 \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{D}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 v \cos v\, dv - \cos v \int r^3 v \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Ee}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \sin v \cos v\, dv - \cos v \int r^3 \sin^2 v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Fe}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \sin 2v \cos v\, dv - \cos v \int r^2 \sin 2v \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Ge}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \cos 2v \cos v\, dv - \cos v \int r^3 \cos 2v \sin v\, dv\right\}\end{aligned}$$

d. h. mit Vernachlässigung von e^2, e^3 ....

$$\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v + \frac{Ca^2}{k^2} + \frac{Da^2}{k^2} v \qquad 36)$$

$$- \frac{3}{2}\frac{Ca^2}{k^2} ev \sin v - \left(\frac{3}{4}\frac{Da^2}{k^2} + \frac{1}{2}\frac{Ea^2}{k^2}\right) ev \cos v - \frac{3}{4}\frac{Da^2}{k^2} ev^2 \sin v$$

$$- \frac{1}{3}\frac{Fa^2}{k^2} e \sin 2v - \frac{1}{8}\frac{Ga^2}{k^2} e \cos 2v$$

Die Constanten c_1 und c_2 hat man gemäss der Bedingung zu bestimmen, dass für die Osculationsepoche, d. h. für $t = 0$, sowohl δr als auch $\frac{d\delta r}{dt}$ verschwinden müssen. Wenn wir

die mit e multiplicirten Glieder bei dieser Bestimmung, welche durchaus nicht die äusserste Schärfe beansprucht, vernachlässigen, so haben wir mit Rücksicht auf die Relation

$$\frac{d\delta r}{dt} = \frac{d\delta r}{dv} \cdot \frac{k\sqrt{p}}{r^2}$$

folgende Bedingungsgleichungen:

$$c_1 \sin v_0 + c_2 \cos v_0 + \frac{a^2}{k^2}(C + Dv_0) = 0$$

$$c_1 \cos v_0 - c_2 \sin v_0 + \frac{a^2}{k^2} D \qquad = 0,$$

woraus

$$c_1 = -\frac{a^2}{k^2}[(C + Dv_0)\sin v_0 + D\cos v_0]$$

$$c_2 = -\frac{a^2}{k^2}[(C + Dv_0)\cos v_0 - D\sin v_0].$$

Es ist zweckmässig, an dieser Stelle eine kurze Erwägung über die Coefficienten C, D, E, F, G anzustellen. In diesen tritt neben den Grössen α'' und β'' auch der Coefficient $\frac{A_0\omega_0}{p}$ auf, in welchem A_0 das Trägheitsmoment der Sonne, ω_0 die Rotationsgeschwindigkeit derselben, p den Parameter der Planetenbahn bedeutet. Obgleich nun das Trägheitsmoment des Sonnenkörpers unbekannt ist, so können wir doch annehmen, dass es kleiner als $\frac{2}{5}R_0^2$ ist, wenn R_0 den Radius der Sonne bedeutet, deren Masse wir, wie bereits früher gesagt, gleich 1 gesetzt haben. Hieraus ergiebt sich nun, dass $\frac{A_0\omega_0}{p}$ ein ausserordentlich kleiner Bruchtheil der Geschwindigkeit eines Planeten, z. B. der Erde, sein muss, während α'' und β'' entweder von derselben Ordnung wie diese Geschwindigkeit, oder doch wenigstens merkliche Bruchtheile derselben sind. Wir werden deshalb mit vollem Rechte alle Glieder mit dem Factor $\frac{A_0\omega_0}{p}$ vernachlässigen, wodurch

unsere Constanten werden, wenn nur die erste Potenz von e mitberücksichtigt wird:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{2k^2\theta}{a}(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0) + \frac{k^2\theta e}{2a}(\alpha'' \cos 2v_0 \\ &\qquad + \beta'' \sin 2v_0 - 2\beta'' v_0) \\ D &= \frac{k^2\theta}{a} e\beta'' \\ E &= 0 \\ F &= -\frac{k^2\theta}{2a}\beta'' \\ G &= -\frac{k^2\theta}{2a}\alpha'' \end{aligned}\right\} \quad 37)$$

Es wird übrigens erlaubt sein, in C das zweite Glied gegen das erste zu vernachlässigen, so dass

$$C = \frac{2k^2\theta}{a}(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0). \qquad 38)$$

Hiernach erhält man für die soeben bestimmten Integrationsconstanten:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -2a\theta(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0) \sin v_0 \\ &= -a\theta(\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0 + \beta'') \\ c_2 &= -2a\theta(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0) \cos v_0 \\ &= -a\theta(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin v_0 + \alpha'') \end{aligned}\right\} \quad 39)$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck 36) für δr ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta r = 2a\theta(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0) &- a\theta(\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0 + \beta'') \sin v \\ &- a\theta(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 + \alpha'') \cos v \\ &+ \frac{1}{6} a\theta\beta'' e \sin 2v + \frac{1}{6} a\theta\alpha'' e \cos 2v \\ 40) \qquad &+ a\theta\beta'' ev \\ &- 3a\theta(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0) ev \sin v \\ &- \frac{3}{4} a\theta\beta'' e^2 v \cos v \\ &- \frac{3}{4} a\theta\beta'' e^2 v^2 \sin v. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist formell vollständig ausreichend, wenn auch in den Coefficienten kleine Glieder den Hauptgliedern gegenüber vernachlässigt sind.

Wir wenden uns jetzt zu der Gleichung 29), welche die Störung der Länge in der xy-Ebene giebt. Wir setzen fest, dass für die Osculationsepoche die Bahnebene mit der xy-Ebene zusammenfällt, also $i = 0$, $z = 0$, $\varrho = r$ ist. Allmählich werden i und z von 0 verschiedene Werthe annehmen, deren zweite Potenzen und Producte mit Störungsgrössen wir jedoch vernachlässigen wollen. Wir werden deshalb durchweg $\varrho = r$, $\delta\varrho = \delta r$, $\cos i = 1$ setzen, und Gleichung 29) wird, wenn man die Planetenmasse der Sonnenmasse gegenüber vernachlässigt:

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2k\sqrt{p}\,\frac{\delta r}{r^3} + \frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\,dt.$$

Da aber

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = \frac{d\delta\lambda}{dv} \cdot \frac{k\sqrt{p}}{r^2},$$

so geht diese Gleichung über in

$$\frac{d\delta\lambda}{dv} = -2\,\frac{\delta r}{r} + \frac{1}{k\sqrt{p}}\int (xY - yX)\,dt. \qquad 41)$$

Wir haben nach 26)

$$xY - yX = \frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha y - \beta x) + \frac{k^2\theta A_0 \gamma_0}{2r^2}.$$

Nun ist

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i)$$
$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

mithin, wenn man

$$\cos i = 1,$$
$$u = v + \omega,$$
$$\Omega + \omega = \Pi$$

setzt,

$$xY - yX = -k^2\theta(-\alpha \sin \Pi + \beta \cos \Pi)\frac{\cos v}{r}$$
$$+ k^2\theta(\alpha \cos \Pi + \beta \sin \Pi)\frac{\sin v}{r} + \frac{k^2\theta A_0 \psi_0}{2r^2}.$$

Zur Abkürzung wollen wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} \alpha \cos \Pi + \beta \sin \Pi &= \alpha''' \\ -\alpha \sin \Pi + \beta \cos \Pi &= \beta''' \end{aligned}\right\} \quad 42)$$

Vernachlässigen wir wie bei der Berechnung von δr das völlig bedeutungslose mit A_0 multiplicirte Glied, so ist

$$xY - yX = k^2\theta\frac{\alpha''' \sin v - \beta''' \cos v}{r}.$$

Das Integral $\int(xY - yX)\,dt$ lässt sich zwar mit Leichtigkeit streng berechnen, da

$$\int\frac{\sin v}{r}\,dt = \frac{\sqrt{p}}{ek}\log \text{nat}\, r$$
$$\int\frac{\cos v}{r}\,dt = \frac{\sqrt{p}}{ek}\left(v - \frac{E}{\cos\varphi}\right),$$

wo φ den Excentricitätswinkel bedeutet.

Wir ziehen jedoch auch an dieser Stelle eine Entwickelung nach den Potenzen von e vor, von denen wir übrigens, mit Vernachlässigung unwesentlicher Glieder, nur die erste beibehalten.

Wir finden

$$\int(xY - yX)\,dt = -k\sqrt{a}\,\theta(\alpha''' \cos v + \beta''' \sin v)$$
$$+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{4}(\alpha''' \cos 2v + \beta''' \sin 2v)$$
$$+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{2}\beta''' \cdot v$$
$$- H,$$

wo

$$H = -k\sqrt{a}\,\theta(\alpha''' \cos v_0 + \beta''' \sin v_0)$$
$$+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{4}(\alpha''' \cos 2v_0 + \beta''' \sin 2v_0) + k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{2}\beta''' v_0.$$

Es wird auch hier genügen, nur das Hauptglied zu berücksichtigen, d. h. zu setzen:

$$H = -k\sqrt{a}\,\theta\,(\alpha''' \cos v_0 + \beta''' \sin v_0). \tag{43}$$

Ferner findet man mit analogen Vernachlässigungen aus 40):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r}{r} = 2\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0) &- \theta(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \beta'')\sin v \\
&- \theta(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 + \alpha'')\cos v \\
&- \frac{\theta}{2}\Big(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 \\
&\qquad + \frac{2}{3}\alpha''\Big)\, e\cos 2v \\
&- \frac{\theta}{2}\Big(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 \\
&\qquad + \frac{2}{3}\beta''\Big)\, e\sin 2v \\
&+ \theta\beta'' ev \\
&- 3\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\, ev\sin v \\
&+ \frac{1}{4}\theta\beta'' e^2 v\cos v \\
&- \frac{3}{2}\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\, e^2 v\sin 2v \\
&- \frac{3}{4}\theta\beta'' e^2 v^2 \sin v.
\end{aligned}$$

Hiernach ergiebt sich dann nach 41)

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\lambda}{dv} = &- \theta[(4\alpha'' - \alpha''')\cos v_0 + (4\beta'' - \beta''')\sin v_0] \\
&+ \theta[2\alpha''\sin 2v_0 - 2\beta''\cos 2v_0 + 2\beta'' - \beta''']\sin v \\
&+ \theta[2\alpha''\cos 2v_0 + 2\beta''\sin 2v_0 + 2\alpha'' - \alpha''']\cos v \\
&+ \theta\left[\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 + \frac{2}{3}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'''\right] e\cos 2v \\
&+ \theta\left[\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \frac{2}{3}\beta'' + \frac{1}{4}\beta'''\right] e\sin 2v \\
&- \frac{\theta}{2}[4\beta'' - \beta''']\, ev \\
&+ 6\theta[\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0]\, ev\sin v
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2}\theta\beta'' e^2 v \cos v$$
$$+ 3\theta[\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0] e^2 v \sin 2v$$
$$+ \frac{3}{2}\theta\beta'' e^2 v^2 \sin v.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt:

$$\begin{aligned}
\delta\lambda = K &- \theta[(4\alpha'' - \alpha''') \cos v_0 + (4\beta'' - \beta''') \sin v_0] v \\
&+ \theta[2(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0) + 2\alpha'' - \alpha'''] \sin v \\
&- \theta[2(\alpha'' \sin 2v_0 + \beta'' \cos 2v_0) + 2\beta'' - \beta'''] \cos v \\
&+ \frac{\theta}{2}\left[\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 + \frac{2}{3}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'''\right] e \sin 2v \\
&- \frac{\theta}{2}\left[\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0 + \frac{2}{3}\beta'' + \frac{1}{4}\beta'''\right] e \cos 2v \\
&+ \frac{5}{2}\theta\beta'' e^2 v \sin v \\
&- 6\theta[\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0] e v \cos v \\
&- \frac{3}{2}\theta[\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0] e^2 v \cos 2v \\
&- \frac{3}{2}\theta\beta'' e^2 v^2 \cos v \\
&- \frac{1}{4}\theta(4\beta'' - \beta''') e v^2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Für K findet man das Hauptglied:

$$\begin{aligned}
K = \theta &[(4\alpha'' - \alpha''') \cos v_0 + (4\beta'' - \beta''') \sin v_0] v_0 \\
&- \theta[2(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0) + 2\alpha'' - \alpha'''] \sin v_0 \\
&+ \theta[2(\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0) + 2\beta'' - \beta'''] \cos v_0
\end{aligned}$$

oder reducirt

$$K = \theta[(4\alpha'' - \alpha''' - \beta''') \cos v_0 + (4\beta'' + \alpha''' - \beta''') \sin v_0] \tag{45}$$

Wenn es sich um eine genaue numerische Berechnung von δr und $\delta\lambda$ handelte, so würde der Umstand, dass in den Gleichungen 40), 44), 45) von allen Coefficienten nur die Haupttheile berücksichtigt sind, in's Gewicht fallen. Es

wäre in diesem Falle z. B. völlig illusorisch, rein periodische Glieder mit $\sin 2v$ und $\cos 2v$ noch mitzunehmen, da diese mit e multiplicirt sind, während in den Coefficienten von $\sin v$ und $\cos v$, sowie in den constanten Gliedern e vernachlässigt ist. Es ist aber wohl zu beachten, dass es sich hier gar nicht um eine zahlenmässige Summation der Störungsglieder, sondern nur um die Feststellung ihrer Form und eine ungefähre Bestimmung der Einzelbeträge handelt, weshalb die hier vorgenommenen Vernachlässigungen als durchaus zweckmässig anzusehen sind.

Wünscht man aus irgend welchem Grunde eine weitere Entwickelung der Coefficienten, so ist dieselbe nach der vorgetragenen Methode mit Leichtigkeit zu erlangen.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir noch die Störung senkrecht zur Bahnebene erörtern, obgleich dieselbe im Folgenden keine Berücksichtigung finden wird. Die Störungsgrösse ist hier z, also, wenn wir Glieder von der Ordnung θ^2 sowie auch A_0 vernachlässigen, nach 26) und 27)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{z}{r^3} = - k^2 \theta \frac{\gamma}{r^2}.$$

Diese Gleichung soll in ähnlicher Weise wie die Differentialgleichung 33) umgeformt werden. Es ist nämlich

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{k^2 p}{r^3} \left(\frac{d^2 \left(\frac{z}{r}\right)}{d v^2} + \frac{z}{r} - \frac{r}{p} \frac{z}{r} \right),$$

mithin wird die Gleichung, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{z}{r} = s \tag{46}$$

setzt,

$$\frac{d^2 s}{d v^2} + s = - \frac{\theta \gamma}{p} r. \tag{47}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \frac{\theta \gamma}{p} \sin v \int r \cos v \, d v + \frac{\theta \gamma}{p} \cos v \int r \sin v \, d v.$$

Nun ist

$$\int r \cos v\, dv = \frac{p}{e}\left(v - \frac{E}{\cos\varphi}\right)$$

$$\int r \sin v\, dv = \frac{p}{e} \log \operatorname{nat} r,$$

mithin

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \frac{\theta\gamma}{e} \sin v \left(v - \frac{E}{\cos\varphi}\right) + \frac{\theta\gamma}{e} \cos v \log \operatorname{nat} r. \qquad 48)$$

Entwickelt man nach Potenzen von e, so lauten die Anfangsglieder

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \theta\gamma + \frac{\theta\gamma}{2} e v \sin v.$$

Da für die Osculationsepoche $t = 0$

$$s = 0 \text{ und } \frac{ds}{dv} = 0,$$

so ergiebt sich genähert

$$c' = \theta\gamma \sin v_0, \quad c'' = \theta\gamma \cos v_0,$$

also mit dem mehrfach erörterten beschränkten Genauigkeitsgrade der Coefficienten:

$$s = \theta\gamma \cos(v - v_0) - \theta\gamma + \frac{\theta\gamma}{2} e v \sin v. \qquad 49)$$

Ist der Planet, dessen Störungen hier berechnet sind, von einem Trabanten begleitet, so gelten die Störungswerthe für den Schwerpunkt des Systems.

Die hier berechneten Störungsgrössen δr und $\delta\lambda$ werden in den folgenden Entwickelungen, in denen allerdings nur die Hauptglieder Berücksichtigung finden, unter der Bezeichnung δr_1 und $\delta\lambda_1$ auftreten.

III. Die Bewegung des Mondes.

Wir haben die Gleichungen 20) und 21) zuerst in der Weise zu integriren, dass wir die Glieder von der Ordnung der Excentricitäten, Neigungen und der Sonnenstörungen des Mondes vernachlässigen. Die Differentialgleichung 20) wird alsdann

$$a\frac{d^2\delta r}{dt^2} + k^2\left(\frac{m+m_0}{a^3} - \frac{2m_1}{a_1^3}\right)a\delta r \qquad 50)$$

$$= 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + (xX + yY + zZ),$$

wo a_1 die halbe grosse Axe der von der Sonne beschriebenen Elipse ist, und a die mittlere Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt bedeutet.

Gleichung 21) wird alsdann

$$a^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2a\frac{d\lambda}{dt}\delta r + \int(xY - yX)\,dt,$$

oder, wenn man für $\frac{d\lambda}{dt}$ die mittlere Winkelbewegung n des Mondes setzt,

$$a^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2an\delta r + \int(xY - yX)\,dt. \qquad 51)$$

Für die auftretenden Kraftcomponenten sind dann natürlich unter demselben Gesichtspunkte nur die Hauptglieder auszuwählen.

Man findet, wenn l und l_1 die mittleren Längen von Mond und Sonne, n_1 die mittlere Bewegung der Sonne bedeutet,

$$xX+yY+zZ \quad \theta a^2\Big\{2n^2(\alpha\cos l+\beta\sin l)-\frac{9}{2}n_1^2(\alpha\cos l_1+\beta\sin l_1)$$

$$-\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\cos(2l-l_1)+\beta\sin(2l-l_1)] + 2n^2n_1a_1\sin(l_1-l)\Big\}$$

$$\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{dt}=\theta a^2 n\Big\{n^2(\alpha\sin l-\beta\cos l)-\frac{3}{2}n_1^2(\alpha\sin l_1-\beta\cos l_1)$$
$$+\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\sin(2l-l_1)-\beta\cos(2l-l_1)]+n^2 n_1 a_1(\cos l_1-l)$$
$$+\frac{m}{m_0}n^3 a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}+\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\Big\}$$

$$xY-yX=\theta a^2\Big\{n^2(\alpha\sin l-\beta\cos l)-\frac{3}{2}n_1^2(\alpha\sin l_1-\beta\cos l_1)$$
$$+\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\sin(2l-l_1)-\beta\cos(2l-l_1)]+n^2 n_1 a_1\cos(l_1-l)$$
$$+\frac{m}{m_0}n^3 a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}+\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\Big\}$$

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\theta a^2 n\Big\{-n(\alpha\cos l+\beta\sin l)+\frac{3}{2}n_1(\alpha\cos l+\beta\sin l_1)$$
$$-\frac{3}{2}\frac{n_1^2}{2n-n_1}[\alpha\cos(2l-l_1)+\beta\sin(2l-l_1)]+\frac{n^2 n_1}{n_1-n}a_1\sin(l_1-l)\Big\}$$
$$+\frac{a}{2}ht+\frac{a}{2}C,$$

wo

$$h=2\theta a n\left\{\frac{m}{m_0}\cdot n^3 a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}-\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right\} \qquad 52a)$$

$$C=-2\theta a n\Big\{-n(\alpha\cos l^{(0)}+\beta\sin l^{(0)})+\frac{3}{2}n_1(\alpha\cos l_1^{(0)}$$
$$+\beta\sin l_1^{(0)})-\frac{3}{2}\frac{n_1^2}{2n-n_1}\left[\alpha\cos(2l^{(0)}-l_1^{(0)})+\beta\sin(2l^{(0)}-l_1^{(0)})\right]$$
$$+\frac{n^2 n_1}{n_1-n}a_1\sin(l_1^{(0)}-l^{(0)})\Big\}, \qquad 52b)$$

wenn $l^{(0)}$ und $l_1^{(0)}$ für die Osculationsepoche $t=0$ gelten.

Einige der hier auftretenden Glieder, die sich unmittelbar aus den Formeln für die Kraftcomponenten ergaben, könnten übrigens ihrer Kleinheit wegen hier fortgelassen werden.

Setzen wir noch

$$n^2-2n_1^2=\nu^2, \qquad 53)$$

so erhalten wir aus 50)

$$\frac{d^2(\delta r)}{dt^2} + \nu^2 \delta r = \theta a \Big\{ 3 n_1 \left(n - \frac{3}{2} n_1\right)(\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$
$$- \frac{3}{2} n_1^2 \frac{4n - n_1}{2n - n_1} [\alpha \cos (2l - l_1) + \beta \sin (2l - l_1)]$$
$$+ \frac{2 n^2 n_1^2}{n - n_1} a_1 \sin (l - l_1) \Big\} + ht + C.$$

Um diese Gleichung zu integriren, beachten wir, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \nu^2 y = \sum \alpha_i \cos (\varkappa_i x + a_i) + \sum \beta_i \sin (\lambda_i x + b_i) + hx + C,$$

in welcher die a_i, b_i, α_i, β_i, $\varkappa_i$, λ_i sowie h und C gegebene Constanten bedeuten, das allgemeine Integral hat

$$y = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x + \sum \frac{\alpha_i}{\nu^2 - \varkappa_i^2} \cos (\varkappa_i x + a_i)$$
$$+ \sum \frac{\beta_i}{\nu^2 - \lambda_i^2} \sin (\lambda_i x + b_i) + \frac{h}{\nu^2} x + \frac{C}{\nu^2},$$

wo c_1 und c_2 die Integrationsconstanten sind.

Dies auf die Differentialgleichung für δr angewandt giebt

$$\delta r = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t + 3 \theta a n_1 \frac{n - \frac{3}{2} n_1}{\nu^2 - n_1^2} (\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$
$$- \frac{3}{2} \theta a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{(2n - n_1)[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \cos (2l - l_1) + \beta \sin (2l - l_1)]$$
$$+ 2 \theta a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{(n - n_1)[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \sin (l - l_1) + \frac{ht}{\nu^2} + \frac{C}{\nu^2} \quad 54)$$

Um die Constanten c_1 und c_2 zu bestimmen bedenke man, dass für die Osculationsepoche $t = 0$ auch δr und $\frac{d \delta r}{dt}$ verschwinden. Hieraus erhält man

$$c_1 = - 3 \theta a n_1 \frac{n - \frac{3}{2} n_1}{\nu^2 - n_1^2} (\alpha \cos l_1^{(0)} + \beta \sin l_1^{(0)})$$
$$+ \frac{3}{2} \theta a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{(2n - n_1)[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \cos (2 l^{(0)} - l_1^{(0)}) + \beta \sin (2 l^{(0)} - l_1^{(0)})]$$
$$- 2 \theta a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{(n - n_1)[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \sin (l^{(0)} - l_1^{(0)}) - \frac{C}{\nu^2}$$

$$c_2 = 3\,\theta\, a\, n_1^2 \frac{n - \frac{3}{4} n_1}{\nu(\nu^2 - n_1^2)} (\alpha \sin l_1^{(0)} - \beta \cos l_1^{(0)})$$

$$- \frac{3}{2}\,\theta a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{\nu[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \sin (2\,l^{(0)} - l_1^{(0)}) - \beta \sin (2\,l^{(0)} - l_1^{(0)})]$$

$$- 2\,\theta\, a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{\nu[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \cos (l^{(0)} - l_1^{(0)}) - \frac{h}{\nu^3}$$

Den gefundenen Werth 54) von δr haben wir nun in die Gleichung 51) einzusetzen. Bei der hier innegehaltenen Genauigkeit ergab sich

$$\int (x Y - y X)\, dt = \frac{1}{n} \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

so dass

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = - \frac{2n}{a} c_1 \cos \nu t - \frac{2n}{a} c_2 \sin \nu t - n\,\theta\,(\alpha \cos l + \beta \sin l)$$

$$- \frac{9}{2}\,\theta\, n_1 \frac{(n - n_1)^2}{n^2 - 3 n_1^2} (\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$

$$- \frac{3}{2}\,\theta \frac{n_1^2}{2n - n_1} \frac{11 n^2 + 3 n_1^2 - 6 n n_1}{3 n^2 + 3 n_1^2 - 4 n n_1} [\alpha \cos (2l - l_1) + \beta \sin (2l - l_1)]$$

$$+ \theta \frac{n^2 n_1}{n_1 - n} \cdot \frac{3 n_1 + 2n}{3 n_1 - 2n} a_1 \sin(l_1 - l) - \frac{h}{a} \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)} \cdot t - \frac{C}{a} \cdot \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)}.$$

Die Integration ergiebt

$$\delta\lambda = - \frac{2n}{a\nu} c_1 \sin \nu t + \frac{2n}{a\nu} c_2 \cos \nu t - \theta\,(\alpha \sin l - \beta \cos l)$$

$$- \frac{9}{2}\,\theta \frac{(n - n_1)^2}{n^2 - 3 n_1^2} (\alpha \sin l_1 - \beta \cos l_1)$$

$$- \frac{3}{2}\,\theta \frac{n_1^2}{(2n - n_1)^2} \frac{11 n^2 + 3 n_1^2 - 6 n n_1}{3 n^2 + 3 n_1^2 - 4 n n_1} [\alpha \sin (2l - l_1) - \beta \cos (2l - l_1)]$$

$$- \frac{\theta\, n^2 n_1}{(n_1 - n)^2} \cdot \frac{3 n_1 + 2n}{3 n_1 - 2n} a_1 \cos (l_1 - l)$$

$$- \frac{h}{2a} \cdot \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)} \cdot t^2 - \frac{C}{a} \cdot \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)} \cdot t + c_3. \quad 55)$$

Die neue Integrationsconstante c_3 ist so zu bestimmen, dass für die Osculationsepoche $t = 0$ auch $\delta\lambda = 0$ wird.

Die Gleichungen 54) und 55) geben eine ungefähre Vorstellung von den durch die endliche Geschwindigkeit der Gravitation bedingten Störungen der Mondbewegung. Will man die Annäherung weiter treiben, so fragt es sich, was für Störungsglieder ein derartiges Interesse beanspruchen, dass ihre schärfere Entwickelung der Mühe lohnt. Offenbar ist es nur die Säcularstörung der Länge, die, falls überhaupt vorhanden, mit der Zeit merklich werden könnte; wir werden uns deshalb auch nur angelegen sein lassen, diese genauer kennen zu lernen.

Die für δr und $\delta\lambda$ gefundenen Werthe 54) und 55) haben wir nun zur Berechnung der indirecten Glieder in den vollständigen Differentialgleichungen 20) und 21) zu verwenden.

Wir haben uns schon überzeugt, dass der Unterschied der geocentrischen und barycentrischen Sonnencoordinaten für uns bedeutungslos ist, weshalb wir, um nicht jetzt die Bezeichnungen zu ändern, statt des in 20) und 21) auftretenden Index 0 überall den Index 1 schreiben.

Setzen wir für den Radiusvector des Mondes den Werth

$$r = a\,[1 + \Sigma f_i \cos(\lambda_i t + b_i)]\,, \tag{56}$$

so wird

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^3}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3}{a^3}\sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i)\,.$$

Dies haben wir in die rechte Seite von 20) einzusetzen; für $\frac{k^2 m_1}{r_0{}^3}$ genügt es aber n_1^2 zu setzen, da Glieder mit diesem kleinen Factor, welche ausserdem mit der Excentricität der Erdbahn multiplicirt sind, völlig unbedeutend sind.

Gleichung 20) nimmt hiernach folgende Gestalt an

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + (n^2-2n_1^2)(r\delta r) = 2\int(Xdx+Ydy+Zdz)+(xX+yY+zZ) \\
+[3n^2\sum f_i\cos(\lambda_i t+b_i)+6n_1^2\cos(2l-2l_1)]\,a\delta r \\
57)\qquad -6n_1^2a^2\sin(2l-2l_1)\delta\lambda - 3n_1^2a^2[1+3\cos(2l-2l_1)]\frac{\delta r_1}{a_1} \\
+6n_1^2a^2\sin(2l-2l_1)\,\delta\lambda_1 \\
+\frac{3}{2}n_1^2a^2\int[1+3\cos(2l-2l_1)]\frac{d\delta r_1}{a_1} \quad -3n_1^2a^2\int\sin(2l-2l_1)\,d\delta\lambda_1 \\
+3n_1^2a\int[1+3\cos(2l-2l_1)]\frac{dr_1}{a_1}\delta r \quad -9n_1^2a^2\int\sin(2l-2l_1)\frac{dr_1}{a_1}\delta\lambda \\
-6n_1^2a^2\int[1+3\cos(2l-2l_1)]\frac{dr_1}{a_1}\frac{\delta r_1}{a_1} \quad +9n_1^2a^2\int\sin(2l-2l_1)\frac{dr_1}{a_1}\delta\lambda_1 \\
-6n_1^2a\int\sin(2l-2l_1)\,d\lambda_1\,\delta r \quad -6n_1^2a^2\int\cos(2l-2l_1)d\lambda_1\,\delta\lambda \\
+9n_1^2a^2\int\sin(2l-2l_1)\,d\lambda_1\frac{\delta r_1}{a_1}, \quad +6n_1^2a^2\int\cos(2l-2l_1)d\lambda_1\delta\lambda_1
\end{aligned}$$

Wie man sieht, sind in dieser Gleichung die Producte der Coefficienten f_i der Mondungleichheiten, sowie deren Producte mit der Erdbahnexentricität sowie Quadrat etc. der letzteren zum Theil bereits vernachlässigt. In den mit n_1^2 multiplicirten Gliedern sollen auch die ersten Potenzen dieser Grössen vernachlässigt werden, soweit dies noch nicht geschehen ist.

Auf der rechten Seite von Gl. 21) setzen wir

$$\lambda = l + \sum g_i\cos(\lambda_i t + b_i),$$

also

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \sum g_i\lambda_i\cos(\lambda_i t + b_i),$$

wodurch, wenn man noch mit

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left[1 - 2\sum f_i\cos(\lambda_i t + b_i)\right]$$

multiplicirt:

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) - \frac{2\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt$$
$$+ \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda}\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\delta\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_1}\delta r_1 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_1}\delta\lambda_1\right)dt,$$

oder, indem man in den von Ω abhängigen Gliedern die Excentricitäten etc. vernachlässigt

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) - \frac{2\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt$$
$$- 3n_1^2\int\sin(2l - 2l_1)\frac{\delta r}{a} - 3n_1^2\int\cos(2l - 2l_1)\,\delta\lambda$$
$$58)\qquad + \frac{9}{2}n_1^2\int\sin(2l - 2l_1)\frac{\delta r_1}{a_1} + 3n_1^2\int\cos(2l - 2l_1)\,\delta\lambda_1$$

Wir betrachten zuerst die Gleichung 58). Um die Säcularglieder in $\delta\lambda$ zu erhalten, haben wir in $\frac{d\delta\lambda}{dt}$ die nicht periodischen der Zeit t proportionalen Glieder aufzusuchen. Ein solches Glied tritt zunächst in $-\frac{2n}{a^2}(r\delta r)$ auf, weshalb die Neubestimmung dieser Grösse aus 57) nothwendig ist. In den anderen Gliedern von 58), in denen die Grössen δr, $\delta\lambda$, δr_1, $\delta\lambda_1$ durchweg mit Verkleinerungsfactoren behaftet sind, kann man die schon bekannten Annäherungen verwenden.

Um das betreffende Glied aus

$$-2\frac{\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i)$$

zu erhalten, hat man in δr nur die Glieder von der Form $t\cos(\lambda_i t + \text{Const.})$ oder $t\sin(\lambda_i t + \text{Const.})$ zu berücksichtigen. Da derartige Glieder aber in 54) nicht vorhanden sind, so ist für unsern Zweck

$$-2\frac{\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) = 0$$

zu setzen.

In dem Gliede

$$\frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt = \frac{1}{a^2}\left[1 - 2\sum f_i\cos(\lambda_i t + b_i)\right]\int(xY - yX)\,dt$$

müssen zuerst die in $xY - yX$ auftretenden constanten Glieder bestimmt werden. Bezeichnet man durch Π und Π_1 die Längen des Mond- und Sonnenperigäums, so sind die hier in Betracht kommenden Werthe von $\lambda_i t + b_i$, d. h. die Argumente der bedeutendsten Ungleichheiten der Mondbewegung, die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} l - \Pi \\ 2l - 2\Pi \end{array}\right\} \text{(Mittelpunktsgleichung)}$$
$$l - 2l_1 + \Pi \quad \text{(Evection)}$$
$$2l - 2l_1 \quad \text{(Variation)}$$
$$l_1 - \Pi_1 \quad \text{(jährliche Gleichung).}$$

Wird der der jährlichen Gleichung entsprechende Werth von f_i mit f_5 bezeichnet, so erhält man nach weitläufigen Rechnungen als constantes Glied in $xY - yX$ den Werth

$$\theta\left[k^2 m n - \frac{1}{2}\frac{k^2 m_1}{a_1^3} a^2 \left(\frac{e_1}{2} + f_5\right)(\alpha \sin \Pi_1 - \beta \cos \Pi_1) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^2} - \frac{A_1\psi_1 a^2}{a_1^4}\right)\right],$$

in welchem freilich das mittelste Glied, da es von der Ordnung $n_1^2 e_1$ resp. $n_1^2 f_i$ ist, ausgelassen wird.

Glieder von der Form $t \sin(\lambda_i t + \text{Const.})$ oder $t \cos(\lambda_i t + \text{Const.})$, welche gleichfalls in $\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\, dt$ der Zeit t proportionale unperiodische Glieder erzeugen könnten, sind in $xY - yX$ nicht vorhanden, so dass für unsere Zwecke

$$\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\, dt = \theta\left[\frac{k^2 m n}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2 m_1}{a_1^3}\left(\frac{e_1}{2} + f_5\right)(\alpha \sin \Pi - \beta \cos \Pi) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t$$

oder genügend genau

$$\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\, dt = \theta\left[\frac{k^2 m n}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t.$$

Die vier letzten in 58) auftretenden Glieder ergeben bei der hier festgesetzten Genauigkeitsgrenze kein säculares Glied.

Die Differentialgleichung für $\delta\lambda$ lautet demnach

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) + \theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right]t \qquad 59)$$

wo für $(r\delta r)$ nur das der Zeit proportionale unperiodische Glied einzusetzen ist.

Wir wenden uns nunmehr zu der Gleichung 57), um das soeben genannte Glied zu bestimmen. Dasselbe wird offenbar hervorgebracht durch ein analog gestaltetes Glied auf der rechten Seite von 57).

Zunächst ist das constante Glied in $2\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{dt}$ zu untersuchen. Die mühsame und langwierige Entwickelung, welche hier nicht vorgeführt werden soll, ergab als constanten Theil

$$\frac{k^2 m_1 a^2}{2a_1^3}\theta\left[n_1(f_5 - g_5) - n(2f_5 + e_1)\right]\left[\alpha\sin\Pi_1 - \beta\cos\Pi_1\right]$$
$$+ 2k^2 mn^2\theta + k^2a^2n\theta\left(\frac{A\omega}{a^4}\cos J + \frac{A_0\omega_0}{a^4}\cos J_0 + \frac{A_1\omega_1}{a_1^4}\cos J_1\right)$$
$$- 2k^2\theta A_1\frac{a^2}{a_1^4}n\psi_1,$$

wo ω, ω_0, ω_1 die Rotationsgeschwindigkeiten von Mond, Erde und Sonne, J, J_0, J_1 die mittleren Neigungswinkel der betreffenden Aequatoren gegen die Ebene der Mondbahn bedeuten. Aus bereits erörterten Gründen kann das erste Glied fortgelassen werden.

Mit ausschliesslicher Rücksicht auf das entwickelte Glied haben wir also

$$2\int(Xdx + Ydy + Zdz) = 2a^2n\theta\left[\frac{k^2mn}{a^2}\right.$$
$$\left. + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\omega\cos J + A_0\omega_0\cos J_0}{a^4} + \frac{A_1\omega_1\cos J_1}{a_1^4}\right) - k^2\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right]t.$$

Indess lässt sich dieser Ausdruck mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Lage der Mondbahn noch vereinfachen. Es ist nämlich leicht zu erkennen, dass die mittleren Neigungen der Aequatoren gegen die Mondbahn wenig von den Neigungen der Aequatoren gegen die Ekliptik abweichen; die Cosinusse werden von den Cosinussen der zuletzt genannten Neigungen nur um Grössen von der Ordnung des Quadrates der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik verschieden sein. Hiernach ist zu setzen:

$$\omega \cos J = \psi, \ \omega_0 \cos J_0 = \psi_0, \ \omega_1 \cos J_1 = \psi_1,$$

woraus

$$2\int(Xdx+Ydy+Zdz) = 2a^2 n\theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2}+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}-\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right]t.$$

Hinsichtlich eines der Zeit proportionalen Gliedes ist ferner

$$xX+yY+zZ=0.$$

Desgleichen mit Hülfe der gefundenen angenäherten Störungswerthe

$$[3n^2\sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i) + 6n_1^2 \cos(2l-2l_1)]\, a\delta r = 0$$

$$6n_1^2 a^2 \sin(2l-2l_1)\,\delta\lambda = 0$$

$$3n_1^2 a^2\left[1+3\cos(2l-2l_1)\right]\frac{\delta r_1}{a_1} = 0$$

$$6n_1^2 a^2 \sin(2l-2l_1)\,\delta\lambda_1 = 0.$$

In 57) folgen nun zehn Integrale, von denen wir sofort diejenigen vier, welche dr_1 enthalten, fortlassen dürfen, da sie nur Glieder von der Ordnung $n_1^2 e_1$ ergeben. Es ist demnach zu untersuchen, ob die übrig bleibenden sechs Integrale unter dem Integralzeichen Constanten enthalten, welche innerhalb unserer Genauigkeitsgrenze liegen. Das ist, wie man leicht erkennt, nicht der Fall, weshalb diese Integrale sämmtlich $= 0$ zu setzen sind.

Die Gleichung 57) lautet demnach:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + (n^2 - 2n_1^2)(r\delta r)$$

$$= 2a^2 n\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t,$$

also mit ausschliesslicher Rücksicht auf das säculare Glied:

$$r\delta r = \frac{2a^2 n}{n^2 - 2n_1^2}\,\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t.$$

Setzt man dies in 59) ein, so erhält man

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{3n^2 + 2n_1^2}{n^2 - 2n_1^2}\,\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t,$$

mithin

$$\delta\lambda = -\frac{3n^2 + 2n_1^2}{2(n^2 - 2n_1^2)}\,\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t^2. \quad 60)$$

Dies ist also die Säcularstörung der Mondlänge, deren Werth sich, wie der Vergleich mit 52a) und 55) zeigt, durch eine erste Berücksichtigung der indirecten Glieder auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen nicht geändert hat. Wie das Vorzeichen von $\delta\lambda$ zeigt, hat man es nicht mit einer Beschleunigung, sondern mit einer Verzögerung der Bewegung des Mondes zu thun, und dieses Resultat würde auch Bestand behalten, wenn man durch weiter getriebene Approximationen, die auf Grund des Vorhergehenden principiell einfach, in der Ausführung aber äusserst complicirt sein werden, den Werth von $\delta\lambda$ noch schärfer bestimmen wollte.

Die genaue numerische Berechnung von $\delta\lambda$ ist auch abgesehen von dem unbekannten Factor θ wegen der Unbekanntschaft mit den Trägheitsmomenten A, A_0, A_1 nicht möglich.

Nennen wir die Radien von Mond, Erde und Sonne ϱ, ϱ_0, ϱ_1, so können wir setzen

$$A = \frac{2}{5}\varrho^2 m \varepsilon$$

$$A_0 = \frac{2}{5}\varrho_0^2 m_0 \varepsilon_0$$

$$A_1 = \frac{2}{5}\varrho_1^2 m_1 \varepsilon_1,$$

wo die Factoren ε, ε_0, ε_1 vermuthlich ächte Brüche sind, da die betreffenden Körper höchst wahrscheinlich nach dem Mittelpunkte zu an Dichtigkeit zunehmen.

Man kann hiernach $\delta\lambda$ unter folgender Form darstellen:

$$\delta\lambda = -\frac{3}{2}\frac{1+\frac{2}{3}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}{1-2\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}\cdot\frac{a m}{m_0+m}\cdot n^3\theta\left[1+\frac{1}{5}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\frac{\psi}{n}\cdot\varepsilon\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\frac{m_0}{m}\cdot\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)^2\frac{\psi_0}{n}\varepsilon_0-\frac{1}{5}\frac{m_0+m}{m}\cdot\frac{a_1}{a}\cdot\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{\varrho_1}{a}\right)^2\frac{\psi_1}{n}\varepsilon_1\right]t^2. \qquad 61)$$

Nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit der Gravitation das G-fache der Lichtgeschwindigkeit ist, welche für die Zeiteinheit des mittleren Sonnentages in planetrischer Längeneinheit ausgedrückt $\frac{86400}{497.78}$ beträgt, so ergiebt sich für t tropische Jahrhunderte

$$\delta\lambda = -\frac{925772''}{G}\left[1+0.000004\,\varepsilon+0.1118\,\varepsilon_0-0.0008\,\varepsilon_1\right]t^2,$$

oder, wenn man die ganz unmerklichen Glieder vernachlässigt,

$$\delta\lambda = -\frac{257^0\,9'\,32''}{G}\left[1+0.1118\,\varepsilon_0\right]t^2.$$

Um die Säcularstörung der Länge des Mondes auf ein erträgliches Maass herabzudrücken, müsste man daher der Geschwindigkeit der Gravitation einen immensen Werth beilegen, vielleicht das Millionfache der Lichtgeschwindigkeit.

Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen.

Von **E. v. Weber.**

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Die Theorie der besonderen Systeme Pfaff'scher Gleichungen, welche in der vorliegenden Mitteilung untersucht werden, umfasst diejenige der partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen als einen speciellen Fall, und bildet gleichzeitig die Grundlage einer allgemeinen Integrationstheorie der letzteren; es gelingt nämlich auf Grund der nachfolgenden Entwicklungen, die Darboux'sche Integrationstheorie der Gleichungen 2. O.[1]) nicht nur zu vervollständigen und nach Lie'schen Principien geometrisch zu interpretieren, sondern auch auf Gleichungen und Gleichungssysteme beliebiger Ordnung zu übertragen.[2])

Im ersten Abschnitt entwickeln wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die genannten Pfaff'schen Systeme Integralflächen der grösstmöglichen Mannigfaltigkeit besitzen und charakterisieren hierdurch eine Klasse von Inte-

1) Ann. de l'Ec. Norm. VII, 1870; vgl. auch König, Math. Ann. 24.

2) Ansätze in dieser Richtung finden sich bereits in den Bäcklund'schen Abhandlungen Math. Ann. 11 und 13; der zuletzt genannte Aufsatz enthält auch schon z. T. die Resultate, welche ich in einer früheren Mitteilung (Sitzungsber. der k. bayer. Ak., 1895, Bd. XXV, Heft I) unter III gegeben habe.

grationsproblemen, welche die partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in 3 Variabeln und die Systeme solcher Gleichungen umfasst; im zweiten Abschnitt werden hinreichende (aber im allgemeinen nicht notwendige) Bedingungen dafür angegeben, dass sich die im I. Teil studierten Integrationsprobleme auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen lassen.

I. Abschnitt.

1. Sind x, y unabhängige, z eine abhängige Variable, so sei:

$$\alpha_i^{(k)} \equiv \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \quad (\alpha_0^{(0)} \equiv z).$$

Verstehen wir unter f eine Funktion von x, y, z, $\alpha_0^{(1)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$, unter δx, $dx, \ldots d\alpha_n^{(n)}$ beliebige Incremente, so setzen wir:

$$D_x^{(\nu)}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{s} \alpha_r^{(s+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_r^{(s)}}$$

$$D_y^{(\nu)}(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{s} \alpha_{r+1}^{(s+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_r^{(s)}}$$

$$\delta f \quad = D_x^{(n-1)}(f)\, \delta x + D_y^{(n-1)}(f)\, \delta y + \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s^{(n)}} \delta \alpha_s^{(n)},$$

$$df \quad = D_x^{(n-1)}(f)\, dx + D_y^{(n-1)}(f)\, dy + \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s^{(n)}} d\alpha_s^{(n)}.$$

also z. B.:

$$\delta \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta y; \; d\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)} dy$$

$$(1) \qquad (i = 0, 1, \ldots k; \; k = 0, 1, \ldots n-1).$$

Ist ferner stets:

$$d\,\delta x \equiv \delta\, dx, \quad d\,\delta y \equiv \delta\, dy, \quad d\,\delta \alpha_i^{(n)} = \delta\, d\alpha_i^{(n)},$$

so folgt aus (1)

$$d\,\delta\alpha_i^{(k)} \equiv \delta\, d\alpha_i^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots n-2),$$

während wir die Ausdrücke

$$d\,\delta\alpha_{i-1}^{(n-1)} - \delta\, d\alpha_{i-1}^{(n-1)} \equiv d\alpha_{i-1}^{(n)}\,\delta x - \delta\alpha_{i-1}^{(n)}\,dx + d\alpha_i^{(n)}\,\delta y - \delta\alpha_i^{(n)}\,dy$$
$$\equiv (d\,\delta)_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots n)\,[1])$$

setzen wollen. Notieren wir noch die Identität:

$$(2) \qquad d(\delta f) - \delta(df) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{i-1}^{(n-1)}} (d\,\delta)_i^{(n)}$$

2. Betrachten wir nun die k Pfaff'schen Ausdrücke:

$$(3) \qquad (\delta)_i \equiv M_i\,\delta x + N_i\,\delta y + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\delta\alpha_s^{(n)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots k;\; k \geq 1 \text{ und } < n)$$

worin die M_i, N_i, $A_{s,i}$ Funktionen von x, y, z, $\alpha_0^{(1)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$ bedeuten. Wir nehmen an, dass aus dem Gleichungssystem:

$$(4) \qquad (\delta)_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

keine Relation zwischen δx, δy allein folgt, so dass nicht alle k-gliedrigen Determinanten der Matrix

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} A_{0,1}, & A_{1,1}, & \ldots & A_{n,1} \\ A_{0,2}, & \ldots & & \\ \cdot & & & \\ A_{0,k} & \cdot & & A_{n,k} \end{matrix} \right\|$$

identisch verschwinden, dass dagegen alle $k+2$-gliedrigen Determinanten der aus $2k$ Zeilen und $n+3$ Colonnen bestehenden Matrix

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_i, & A_{0,i}, & A_{1,i}, & \cdot\; A_{n,i}, & 0 \\ N_i, & 0, & A_{0,i}, & \ldots & A_{n,i} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

[1]) Vgl. den § 4 meiner Arbeit: „Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen", Math. Ann. 47.

identisch Null sind, ohne dass dies bei allen $k+1$-gliedrigen Determinanten der Fall ist.

Aus dem Verschwinden aller $k+2$-gliedrigen Determinanten der Matrix, die aus (6) durch Streichung der ersten Colonne hervorgeht, und aus dem Umstande, dass nicht alle k-gliedrigen Determinanten (5) Null sind, lässt sich beweisen, dass die k Gleichungen mit der Unbekannten μ:

$$(7) \qquad \varphi_i(\mu) = \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\, \mu^{n-s} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

genau $n-k+1$ Wurzeln gemein haben. Seien dieselben durch die Gleichung

$$\chi(\mu) \equiv \sum_{r=0}^{n-k+1} \varrho_r\, \mu^{n-k+1-r} = 0$$

definiert, so kann man also setzen:

$$\varphi_i(\mu) \equiv \chi(\mu) \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri}\, \mu^{k-1-r}.$$

Die λ_{ri}, ϱ_i sind rational durch die $A_{s,j}$ ausdrückbar; umgekehrt hat man:

$$(8) \qquad A_{s,j} \equiv \sum_{r=0}^{s} \varrho_r\, \lambda_{s-r,j}.$$

3. Aus unseren Voraussetzungen über die Ausdrücke (3) folgt ferner, dass sich die $2k$ Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{cases} U_i \equiv M_i + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\, \alpha_s^{(n+1)} = 0 \\ V_i \equiv N_i + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\, \alpha_{s+1}^{(n+1)} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

auf genau $k+1$ in den $\alpha_i^{(n+1)}$ unabhängige Gleichungen reducieren. Diese können nun auf folgende Form gebracht werden:

$$(10) \qquad K_i = \sum_{s=0}^{n-k+1} \varrho_s \alpha_{s+i}^{(n+1)} + \varkappa_i = 0 \quad (i = 0, 1, .. k).$$

In der That kann man die Funktionen $\varkappa_i$ eindeutig so bestimmen, dass für jeden Wert der $\alpha_i^{(n+1)}$ die Beziehungen gelten:

$$(11) \qquad U_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} K_s, \quad V_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} K_{s+1};$$

denn die Coefficienten der $\alpha_i^{(n+1)}$ sind wegen (8) auf beiden Seiten gleich, und die Vergleichung der von $\alpha_i^{(n+1)}$ freien Glieder liefert für die Unbekannten $\varkappa_i$ die $2k$ Bedingungen:

$$M_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} \varkappa_s; \quad N_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} \varkappa_{s+1};$$

dass aber alle $k+2$-gliedrigen Determinanten der zu diesen Gleichungen gehörigen Matrix verschwinden, ohne dass dies alle $k+1$-gliedrigen thun, folgt aus den Voraussetzungen der N. 2, wenn man für die A_{sj} ihre Werte (8) in (6) substituirt und beachtet, dass ϱ_0 als nicht identisch verschwindend angenommen werden kann.

Da man aus denselben Gründen die K_s vermöge (11) als lineare homogene Funktionen der U_i, V_i ausdrücken kann, so sind die Systeme (9) und (10) völlig äquivalent.

4. Als „Charakteristik n. O." des Pfaff'schen Systems (4) bezeichnen wir jeden Streifen n. O., der einem der $n-k+1$ folgenden Gleichungssysteme genügt:

$$(12) \quad dy = \varDelta_\nu \, dx$$

$$(13) \quad d\alpha_i^{(r)} = \left(\alpha_i^{(r+1)} + \varDelta_\nu \, \alpha_{i+1}^{(r+1)}\right) dx \, (i = 0, .. r; \; r = 0, .. n-1)$$

$$(14) \quad d\alpha_i^{(n)} = \left(\alpha_i^{(n+1)} + \varDelta_\nu \, \alpha_{i+1}^{(n+1)}\right) dx \, (i = 0, 1, .. n),$$

unter $\varDelta_1, \varDelta_2, .. \varDelta_{n-k+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(15) \qquad \chi(-\varDelta) = 0,$$

unter den $\alpha_i^{(n+1)}$ Funktionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ verstanden, die (10) befriedigen. Die Elimination der $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (10) (14) führt wegen (15) auf die folgenden Gleichungen, die (14) ersetzen können:

$$(16) \qquad \sum_{s=0}^{n-k} B_{s,\nu}\, d\alpha_{i+s}^{(n)} + \varkappa_i\, dx = 0 \;\; (i = 0, 1, \ldots k),$$

$$\left(B_{s,\nu} \equiv \sum_{r=0}^{s} \varrho_r \, (-\Lambda_\nu)^{s-r}\right).$$

Aus unserer Definition folgt, dass alle ∞^2 Flächenelemente $n+1$. 0., die sich an eine Charakteristik anschliessen, den Gleichungen (10) genügen.

5. Ein mit dem Pfaff'schen System (12) (13) (16) äquivalentes System erhält man auch, wenn man in jeder der Identitäten

$$(17) \qquad (\delta)_i \equiv \sum_{s=1}^{n} \varrho_{si}\, (d\,\delta)_s^{(n)} \;\; (i = 1, 2, \ldots k)$$

die Coefficienten der δx, δy, $\delta \alpha_r^{(n)}$ auf beiden Seiten gleichsetzt, und hierauf die ϱ_{si} eliminiert. Zur Verification dieser Thatsache bemerken wir, dass aus der einzelnen Identität (17) durch die geschilderte Operation ausser den Relationen (12) (15) zwei Gleichungen für die $d\alpha_i^{(n)}$ hervorgehen, die andererseits auch erhalten werden, wenn man aus dem entsprechenden Gleichungspaar (9) und aus (14) die $\alpha_i^{(n+1)}$ eliminiert. Unsere Behauptung folgt dann aus der Aequivalenz von (9) und (10).

6. Ist nun s ein „gemeinsamer Streifen n. O. der Pfaff'schen Gleichungen (4)", d. h. genügt s den Gleichungen (4), so folgt aus (17), dass die n Gleichungen

$$(18) \qquad (d\,\delta)_i^{(n)} = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots n)$$

sich auf genau $n-k$ unabhängige reducieren, wenn die dx, dy, $d\alpha_i^{(n)}$ den Relationen (12) (16) genügen; es können nämlich nicht alle k-gliedrigen Determinanten der Matrix

$$\| \varrho_{si} \|$$

identisch verschwinden, da sich sonst entgegen unserer Voraussetzung über die Ausdrücke (3) für dieselben eine lineare Identität ergäbe. Wenn nun keine der Relationen

$$(19) \qquad \delta y = \Delta_\nu \delta x \; (\nu = 1, 2, .. \, n-k+1)$$

erfüllt ist, so kann man aus (12) (16) (18) die Grössen dx, dy, $d\alpha_r^{(n)}$ eindeutig bestimmen, wie aus der Form dieser Gleichungen leicht hervorgeht. Bezeichnen wir mit $d_\nu x, d_\nu y$, $d_\nu \alpha^{(n)}$ dieses Lösungssystem, mit e, e', e'' successive Elemente n. O. von s, so gibt es $n-k+1$ zu e benachbarte, mit ihm vereinigt liegende Elemente e_ν $(x + d_\nu x, \ldots \alpha_n^{(n)} + d_\nu \alpha_n^{(n)})$; aus der geometrischen Bedeutung der Gleichungen (18) folgt dann[1], dass diese Elemente mit e, e' zusammen auf demselben Element $n+1.0.$ E gelegen sind, das nach der Schlussbemerkung der vorigen N. die Relationen (10) befriedigt. Desgleichen gibt es $n-k+1$ zu e' benachbarte Elemente e'_ν $(x + d_\nu x + \delta x + d_\nu \delta x, \ldots .)$, die mit e' e'' zusammen ein den Relationen (10) genügendes Element $n+1.0.E'$ bestimmen; die Incremente $d_\nu dx .. d_\nu \delta\alpha_n^{(n)}$ berechnen sich aus (12) (16) (18), nachdem man darin unter Berücksichtigung der N. 1 die $x .. \alpha_n^{(n)}$ durch $x + \delta x$ etc. ersetzt hat. Durch s geht mithin ein und nur ein Streifen $n+1.0.S$, dessen Elemente $E, E' ..$ den Gleichungen (10) genügen[2]), und die Elemente e_ν, $e'_\nu \ldots$ erfüllen für $\nu = 1, ..$

---

[1]) Vgl. meine pag. 425 citierte Arbeit § 4.

[2]) Dasselbe folgt kürzer daraus, dass die Elimination der $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (10) und:

$$\ldots\ldots \delta \alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)} \delta y \; (i = 0, 1, .. \, n)$$

$n-k+1$ einen und denselben, auf S gelegenen, zu s benachbarten und mit ihm vereinigt liegenden Streifen s_1.

7. Verlangen wir nun, dass s_1 wieder ein Streifen des Pfaff'schen Systems (4) sei, so müssen vermöge unserer Annahmen über s die Beziehungen gelten:

$$d_\nu(\delta)_i \equiv 0, \quad (i = 1, \ldots k)$$

wie auch e auf s gewählt sein mag. Da nun aus (17), indem man darin d und δ durch d_ν ersetzt, die Beziehungen

$$(d_\nu)_i \equiv 0$$

folgen, so hat man auch $\delta(d_\nu)_i \equiv 0$, da doch e' und e'_ν ebenso wie e und e_ν Elemente einer Charakteristik sind.

Mithin setzt sich unsere Forderung in die andere um, dass die (von den zweiten Differentialen freien) Ausdrücke

$$d_\nu(\delta)_i - \delta(d_\nu)_i \tag{20}$$

identisch verschwinden, wenn die $d_\nu x$, $d_\nu y$, $d_\nu \alpha_i^{(n)}$ den Relationen (12) (16), die δx .. den Gleichungen (18) genügen. Nun sind aber die $d_\nu x$ etc. auch durch (12) und (14) definiert, unter den $\alpha_i^{(n+1)}$ Grössen verstanden, die (10) befriedigen, und das allgemeinste Incrementensystem $\delta\alpha_i^{(n)}$, das (18) erfüllt, ist demzufolge durch

$$\alpha_i^{(n+1)}\delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)}\delta y \tag{21}$$

gegeben, worin die $\alpha_i^{(n+1)}$ dieselbe Bedeutung haben, wie in (14), während die δx, δy ganz willkürlich bleiben.[1])

Führt man jetzt die Differentiationen in (20) nach N. 1 aus und ersetzt hinterher die Incremente durch ihre Werte (14) (21), so erhält man nach kurzer Rechnung als not-

---

auf die Bedingungen (4) führt, und dass, wenn diese erfüllt sind, aus den genannten Gleichungen die $\alpha_i^{(n+1)}$ sich eindeutig berechnen lassen, wenn keine der Relationen (19) erfüllt ist.

1) Vgl. das Citat auf pag. 429.

wendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass s_1 wieder ein Streifen des Pfaff'schen Systems (4) sei, die folgenden: Man muss vermöge der Gleichungen (9) oder (10) identisch haben:

$$(22) \qquad D_x^{(n)}(V_i) = D_y^{(n)}(U_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots k),$$

oder, was wegen (11) dasselbe ist:

$$(23) \qquad D_x^{(n)}(K_{s+1}) = D_y^{(n)}(K_s) \qquad (s = 0, 1, \ldots k - 1).$$

8. Da somit, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, auf s_1 als einen gemeinsamen Streifen der Pfaff'schen Gleichungen (4) wieder dieselben Schlüsse angewendet werden können, wie auf s, so kommt man durch unbegrenzte Wiederholung dieser Schlussweise zu dem Resultat, dass durch s eine und nur eine Fläche v hindurchgeht, die den Gleichungen (4) sowohl als auch den $k + 1$ partiellen Differentialgleichungen $n + 1$. O. (10) identisch genügt. Bemerken wir nämlich, dass die Fläche v, sofern sie überhaupt existiert, schon durch die Forderung, s (und S) zu enthalten und irgend einer der Gleichungen (10) zu genügen, völlig bestimmt sein muss, so folgt die Existenz dieser Fläche aus den bekannten Fundamentaltheoremen[1]), wenn wir gewisse Continuitätsbedingungen als erfüllt ansehen; also:

„Bestehen die Relationen (23), so geht durch jeden gemeinsamen Streifen n. O. von (4), der keine der Gleichungen (19) befriedigt, eine und nur eine „Integralfläche“ des Pfaff'schen Systems (4), welche aus je ∞^1 Charakteristiken eines jeden der $n - k + 1$ verschiedenen Systeme aufgebaut ist.“

Das so erhaltene Integral (4) hängt offenbar ab von $n - k + 1$ arbiträren Funktionen je eines Arguments.[1])

1) Genügt s ausser den Relationen (4) auch einer der Gleichungen (19), ohne indes eine Charakteristik zu sein, so geht durch ihn eine Integralfläche von (4), die ihm entlang eine Rückkehr-

9. Sind die Voraussetzungen der NN. 2 und 8 in Betreff der Ausdrücke (3) erfüllt, so nennen wir die Gesamtheit der $n-k+1$ Charakteristikensysteme der Gleichungen (4) ein „unbeschränkt integrables Streifensystem" und bezeichen es mit dem Symbol $S^{(n)}_{n-k}$. Je nachdem nun die Ausdrücke (3) keine, oder 1, 2, . . k unabhängige lineare Combinationen der Form $\delta\Phi_i$ gestatten (unter den Φ_i Funktionen von x . . $\alpha^{(n)}_n$ verstanden), ergiebt sich eine wichtige Einteilung der Systeme $S^{(n)}_{n-k}$ in $k+1$ Arten, die wir mit dem Symbol

$$S^{(n)}_{n-k,\,l}\,(l=0,1,\ldots k) \tag{24}$$

bezeichnen wollen.[1]) Besonderes Interesse bietet der Fall $l=k$; man kann dann die $(\delta)_i$ durch die $\delta\Phi_i$ ersetzen und demzufolge den Ausdrücken M_i, N_i, $A_{s,i}$ der N. 2 bez. die Bedeutungen

$$D^{(n-1)}_x(\Phi_i),\ D^{(n-1)}_y(\Phi_i),\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha^{(n)}_s}$$

beilegen. Die Bedingungen (23) sind jetzt eine Folge derjenigen der N. 2; man erkennt dies entweder nach N. 7 aus (2), indem man f durch die Φ_i ersetzt, oder direkt daraus, dass die Relationen (22) nunmehr identisch, nicht nur ver-

---

kante n. O. besitzt (vgl. meine pag. 425 citierte Arbeit, § 7); durch eine Charakteristik geht eine Schaar von Integralflächen, die noch von einer arbiträren Funktion eines Arguments abhängt. Die Integralflächen des Textes sind, als Schaaren von ∞^2 Flächenelementen aufgefasst, die allgemeinsten „Integraläquivalente" des Pfaff'schen Systems, das aus der ersten Gruppe der Gleichungen (1) und aus (4) gebildet wird.

1) Die in meiner früheren Note und in meiner Arbeit Math. Ann. 47 betrachteten Systeme sind demnach mit $S^{(n)}_{0,l}\,(l=0,1,..n)$, das Charakteristikensystem einer Gleichung n. O. mit $S^{(n)}_{n-1,1}$ zu bezeichnen; den Fall $S^{(1)}_{0,0}$ betrachtet gelegentlich Herr Bäcklund (Math. Ann. 13); Beispiele für die Fälle $S^{(2)}_{0,0}$ und $S^{(2)}_{0,1}$ finden sich in meiner oben citierten Arbeit.

möge (9), erfüllt sind. Die k in Bezug auf die $\alpha_r^{(n)}$ unabhängigen Gleichungen n. O.:

$$\Phi_i = C_i \; (i = 1, 2, \ldots k), \tag{25}$$

in denen die C_i willkürliche Constante bedeuten und die wir als ein Involutionssystem bezeichnen, besitzen dann ein gemeinsames Integral mit $n - k + 1$ arbiträren Funktionen, in dem Sinne, dass durch jeden ihrer gemeinsamen Streifen n. O. im allgemeinen eine und nur eine gemeinsame Integralfläche hindurchgeht.

10. Die vorstehenden Bemerkungen gelten auch, wenn einige der C_i, etwa die m ersten $(0 \leq m < k)$, durch Null ersetzt werden; die Bedingungen der N. 2 müssen jetzt vermöge der Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_m = 0$$

bestehen, und auf eben diese Relationen ist auch bei der Wahl des Ausgangsstreifens s (N. 6) Rücksicht zu nehmen.

11. Die Bedingungen (23) drücken aus, dass die Gleichungen $n + 1$. O. (10) im Sinne der vorigen N. ein Involutionssystem bilden. Ist umgekehrt ein System von $k + 1$ involutorischen, in Bezug auf die $\alpha_i^{(n+1)}$ linearen und unabhängigen Gleichungen $n + 1$. O. vorgelegt, so kann man dasselbe, wie leicht zu sehen, auf die Form (10) bringen, worauf durch (3) und (17) ein System $S_{n-k,l}^{(n)}$ definiert ist, wenn man setzt:

$$M_i = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri}\, x_r; \quad N_i = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri}\, x_{r+1}; \quad A_{s,i} = \sum_{r=0}^{s} \varrho_r\, \lambda_{s-r,i},$$

unter den λ_{ri} irgend welche k^2 Funktionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ mit nicht identisch verschwindender Determinante verstanden. Der Charakter l des Systems $S_{n-k,l}^{(n)}$ bestimmt sich dann durch algebraische Operationen, die l integrabeln Combinationen $\delta\Phi_i$ der Ausdrücke $(\delta)_i$ durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme.

II. Abschnitt.

1. Wir betrachten ein Pfaff'sches System

$$(1) \qquad (\delta)_i = 0 \quad (i = 1, 2 \,..\, k)$$

von der in I, NN. 2 und 7 geschilderten Beschaffenheit und das dazu gehörige System von $k+1$ linearen partiellen Differentialgleichungen $n+1$. O. (vgl. I, (10)):

$$(2) \qquad K_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots k).$$

Aus den Beziehungen I (23) folgt dann leicht: Differentiirt man die Relationen (2) j-mal partiell nach x und y, wobei die Grössen $\alpha_i^{(h)}$ als Funktionen von x und y betrachtet werden, so reducieren sich die resultierenden Gleichungen vermöge aller vorhergehenden auf $k+j+1$ der Form:

$$(3) \qquad K_i^{(j)} \equiv \sum_{h=0}^{m+1} \varrho_h \, \alpha_{h+i}^{(n+j+1)} + \varkappa_i^{(j)} = 0 \quad (i = 0, 1, \,..\, k+j),$$

worin zur Abkürzung $m = n - k$ gesetzt ist[1]).

2. Unter einer „Charakteristik $n+r.0.$" des Pfaff'schen Systems (1) verstehen wir einen Streifen $n+r.0.$, der die folgenden Differentialgleichungen befriedigt:

$$(4) \qquad dy = \Delta_\mu \, dx;$$

$$(5) \qquad d\alpha_i^{(h)} = \left(\alpha_i^{(h+1)} + \Delta_\mu \, \alpha_{i+1}^{(h+1)}\right) dx \,(i = 0, 1 \,..\, h;\ h = 0, 1, \ldots \ldots n+r-1);$$

$$(6) \qquad d\alpha_i^{(n+r)} = \left(\alpha_i^{(n+r+1)} + \Delta_\mu \, \alpha_{i+1}^{(n+r+1)}\right) dx \,(i = 0, 1 \,..\, n+r),$$

unter Δ_μ eine der $m+1$ Wurzeln $\Delta_1 \,..\, \Delta_{m+1}$ der Gleichung

$$(7) \qquad \chi(-\Delta) = 0$$

1) $K_i^{(0)} = K_i$; $\varkappa_i^{(0)} = \varkappa_i$.

(vgl. I (15)), unter den Grössen $\alpha_0^{(n+1)} \ldots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ irgendwelche Funktionen von $x\,y\,z\,\alpha_0^{(1)} .. \alpha_n^{(n)}$ verstanden, die den Gleichungen

$$(8) \qquad K_i^{(h)} = 0 \; (i = 0, 1 \ldots k + h;\; h = 0, 1, .. r - 1)$$

$$(9) \qquad K_i^{(r)} = 0 \; (i = 0, 1 \ldots k + r)$$

identisch genügen; die Systeme (8) (9) sollen auch von den Integrationsconstanten $x .. \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, mithin von allen Flächenelementen des Streifens erfüllt werden. Eine solche Charakteristik bezeichnen wir generell mit $C_\mu^{(n+r)}$. Die $m+1$ Charakteristikensysteme $n+r.0.$ bilden zusammen ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_m^{(n+r)}$[1]).

Die Elimination der $\alpha_i^{(n+r+1)}$ aus (6) und (9) führt auf die $k+r+1$ totalen Differentialgleichungen

$$(10) .. [d]_{i,\mu} \equiv \sum_{h=0}^{m} B_{h,\mu}\, d\alpha_{i+h}^{(n+r)} + \varkappa_i^{(r)}\, dx = 0 \; (i = 0, 1, .. k + r)$$

$$\left(B_{h,\mu} \equiv \sum_{j=0}^{h} \varrho_j (-\varDelta_\mu)^{h-j}\right)$$

die wir mit (4) (5) zusammen als die Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r)}$ bezeichnen wollen. Ist $\varDelta_\mu$ keine mehrfach zählende Wurzel von (7)[2]), so sind längs jedes Streifens $C_\mu^{(n)}\ \infty^1$ $C_\mu^{(n+1)}$ bestimmt, deren einzelner durch Angabe eines seiner Elemente $n+1.0.$ festgelegt ist; ebenso gehen durch jede $C_\mu^{(n+1)}\ \infty^1\ C_\mu^{(n+2)}$ etc.

3. Wir verstehen unter F eine Funktion der Grössen $x .. \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, setzen

$$A_i \equiv \frac{\partial F}{\partial \alpha_i^{(n+r)}}$$

---

[1]) Vgl. I, N. 9; doch durchzieht dieses System nicht den ganzen Raum $x .. \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, sondern nur die durch (8) definierte Mannigfaltigkeit.

[2]) Vgl. § 1 meiner Arbeit in den Math. Ann. Bd. 47.



ferner, wie in I, N. 1:

$$dF = D_x^{(n+r-1)}(F)\,dx + D_y^{(n+r-1)}(F)\,dy + \sum_{h=0}^{n+r} A_h\, d\alpha_h^{(n+r)},$$

und nehmen an, dass dF eine integrable Combination der Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r)}$ sei, d. h. dass man für alle Werte der Incremente dx, dy, $d\alpha_i^{(n+r)}$ vermöge (8) identisch habe:

$$(11) \qquad \sigma(dy - A_\mu\, dx) + \sum_{i=0}^{k+r} \sigma_i\, [d]_{i,\mu} \equiv dF,$$

unter σ, σ_i nicht näher bestimmte Funktionen von $x \cdots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ verstanden. Solche integrable Combinationen sind z. B. die Ausdrücke $dK_i^{(r-1)}$; doch setzen wir voraus, dass aus den Gleichungen

$$(12) \qquad dF = 0, \; dK_i^{(r-1)} = 0 \; (i = 0, 1 \ldots k + r - 1)$$

vermöge (8) keine Relation zwischen dx, dy allein folgt[1]), insbesondere also auch, dass zwischen den linken Seiten dieser Relationen keine lineare Identität besteht; dF sei dann eine **eigentliche** integrable Combination der $C_\mu^{(n+r)}$ genannt. Für F erhält man aus (11), indem man darin die Coefficienten der $dx \ldots$ auf beiden Seiten gleichsetzt und die σ, σ_i eliminiert, ein System homogener linearer partieller Differentialgleichungen 1. O., worin die Variabeln $x \ldots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ den Relationen (8) zu genügen haben, und sich die Zahl der unabhängigen Variabeln demgemäss reduciert. Alle etwa vorhandenen integrabeln Combinationen der $C_\mu^{(n+r)}$ werden also durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme gefunden.

---

[1]) Im Falle $r = 0$ soll dasselbe für die Gleichungen

$$dF = 0, \; (d)_i = 0 \; (i = 1, 2, \ldots k)$$

gelten.

4. Unsere Annahme in Bezug auf F ist mit der andern äquivalent, dass der Ausdruck

$$D_x^{(n+r)}(F) + \varDelta_\mu D_y^{(n+r)}(F)$$

vermöge (8) (9) verschwinde, d. h. dass vermöge (8) eine Identität der Form

$$\sum_{h=0}^{k+r} \lambda_h K_h^{(r)} \equiv \varrho \left(D_x^{(n+r)}(F) + \varDelta_\mu D_y^{(n+r)}(F)\right) \tag{13}$$

bestehe, unter ϱ, λ_i Funktionen von $x \,.\,.\, \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ verstanden. Also verschwinden vermöge (8) alle $k + r + 3$-gliederigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \varkappa_0^{(r)} & , \varrho_0, & \varrho_1, & . & . & 0 & , 0 \\ \varkappa_1^{(r)} & , 0, & \varrho_0, & . & . & 0 & , 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \varkappa_{k+r}^{(r)} & , 0, & 0, & . & . & \varrho_m & , \varrho_{m+1} \\ D_x^{(n+r-1)}(F), & A_0, & A_1, & . & . & A_{n+r} & , 0 \\ D_y^{(n+r-1)}(F), & 0, & A_0, & . & . & A_{n+r-1}, & A_{n+r} \end{matrix} \right\| \tag{14}$$

was für F wieder ein System partieller Differentialgleichungen 1. O. darstellt, dessen gemeinsame Integrale aber nunmehr die etwaigen integrabeln Combinationen aller $m + 1$ $C_{(n+r)}$-systeme liefern.

Es möge umgekehrt F obigen Bedingungen genügen, aber nicht alle $k + r + 2$-gliedrigen Determinanten der Matrix (14), insbesondere aber auch nicht alle aus den letzten $n + r + 2$ Colonnen gebildeten,[1]) zum Verschwinden bringen; dann besitzen die Gleichungen (7) und:

$$\sum_{h=0}^{n+r} A_h (-\varDelta)^{n+r-h} = 0$$

1) Sonst würde aus (12) eine Relation für dx, dy folgen.

wie leicht ersichtlich, genau m gemeinsame Wurzeln, die mit $\Delta_1 \ldots \Delta_{r-1}\, \Delta_{r+1} \ldots \Delta_{m+1}$ bezeichnet und durch die Gleichung:

$$(15) \qquad \sum_{h=0}^{m} \varrho_h' \,(-\Delta)^{m-h} = 0$$

gegeben seien. Man verificiert nunmehr leicht, dass eine Identität der Form (13) besteht, sowie dass die $k+r+2$ in den $\alpha_i^{(n+r)}$ unabhängigen Relationen, auf die sich demnach die Gleichungen (9) und:

$$D_x^{(n+r)}(F) = 0, \; D_y^{(n+r)}(F) = 0$$

reducieren, die folgende Form erhalten können:

$$(16) \quad L_i^{(0)} = \sum_{h=0}^{m} \varrho_h' \,\alpha_{h+i}^{(n+r+1)} + l_i^{(0)} = 0 \;\; (i = 0, 1, \cdot k + r + 1).$$

Durch j-malige Differentiation dieser Gleichungen, die vermöge (8) ein Involutionssystem bilden (I, N. N. 10, 11), erhält man vermöge (8) und der vorhergehenden Differentiationsgleichungen $k + r + j + 2$ Gleichungen

$$(17) \qquad L_i^{(j)} = 0 \qquad (i = 0, 1 \ldots k + r + j + 1).$$

Die „Charakteristiken $C_\nu^{(n+r+r')}$" des Involutionssystems (16) sind definiert durch die Gleichungen:

$$dy = \Delta_\nu dx;\; d\alpha_i^{(h)} = (\alpha_i^{(h+1)} + \Delta_\nu \alpha_{i+1}^{(h+1)})\,dx \;\; (h = 0, 1, \ldots k + r + r')$$

worin Δ_ν eine Wurzel von (15) bedeutet und die $\alpha_i^{(n+l)}$ die Relationen (8) (17) (18) identisch erfüllen, und bilden ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_{m-1}^{(n+r+r')}$[1]; die Gleichung

$$(18) \qquad F = C$$

---

1) Vgl. die Anm. pag. 435.

hat also mit (1) ein Integral gemein, das von m willkürlichen Funktionen je eines Arguments abhängt, indem durch jeden gemeinsamen Streifen $n+r$. O. von (1)[1]) und (18) eine und nur eine Fläche hindurchgeht, die den Gleichungen (1) (18) genügt.

5. Man entnimmt dem Vorhergehenden leicht den folgenden allgemeinen Satz:

„Ist $r' > r$, F' eine Funktion von $x \ldots \alpha_{n+r'}^{(n+r')}$ und besitzen die Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r')}$ von (1) die integrabele Combination dF', so ist auch df eine solche, unter f irgend eine Funktion von F und F' verstanden."

6. Sei die ganze Zahl $s > r$, ferner $\nu \gtrless \mu$, Φ eine Funktion von $x \ldots \alpha_{n+s}^{(n+s)}$, $d\Phi$ eine eigentliche integrable Combination der Definitionsgleichungen der $C_\nu^{(n+s)}$ von (1), so ist $d\Phi$ offenbar auch eine eigentliche integrable Combination der $C_\nu^{(n+s)}$ des Involutionssystems (16); also reducieren sich die $k+s+4$ Gleichungen:

$$L_i^{(s-r)} = 0, \quad D_x^{(n+s)}(\Phi) = 0, \quad D_y^{(n+s)}(\Phi) = 0$$

auf $k+s+3$ in den $\alpha_i^{(n+s+1)}$ unabhängige, die vermöge der vorhergehenden Gleichungen (17) und vermöge (8) ein Involutionssystem bilden, und die Gleichungen (1) (18) nnd $\Phi = C$ haben somit ein Integral mit $m-1$ willkürlichen Funktionen gemein; durch Wiederholung dieser Schlussweise erhält man schliesslich folgendes Theorem:

„Ist die ganze Zahl $\lambda < m$, sind die partiellen Differentialgleichungen

$$F_1 = C_1, \; F_2 = C_2 \ldots F_\lambda = C_\lambda \tag{19}$$

1) Ein Streifen $n+r$. O. von (1) ist ein solcher, dessen Elemente n. O. den Gleichungen (1), dessen Elemente $n+1$. O. den Relationen (2) etc. genügen.



bezw. von der Ordnung $n+r_1, \cdots n+r_\lambda$ und ist $n+r$ die grösste dieser Zahlen, besitzen ferner die Definitionsgleichungen der Charakteristiken $C_1^{(n+r_1)}, \ldots C_\lambda^{(n+r_\lambda)}$ des Pfaff'schen Systems (1) bez. die eigentlichen integrabeln Combinationen $dF_1 \ldots dF_\lambda$, so definieren das System (1) und die Gleichungen (19) durch ihre gemeinsamen Charakteristiken $n+r.0.$ ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ und besitzen daher ein gemeinsames Integral mit $m-\lambda+1$ arbiträren Funktionen, indem durch jeden ihrer gemeinsamen Streifen $n+r.0.$, der keine Charakteristik des Systems $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ ist, eine und nur eine gemeinsame Integralfläche hindurchgeht."

7. Wir nehmen endlich an, dass die Funktionen $F_1 \ldots F_m$, $F'_1 \ldots F'_m$ bez. die Ordnung $n+r_1, \ldots n+r_m$, $n+r'_1, \ldots n+r'_m$ besitzen, dass man habe $r_i > r'_i \, (i=1,2,\ldots m)$, und dass r die grösste der Zahlen r_i sei. Es sei ferner für $i=1,2,\ldots m$ dF_i eine eigentliche integrable Combination der $C_i^{(n+r_i)}$, dF'_i eine solche der $C_i^{(n+r'_i)}$ des Pfaff'schen Systems (1); im Falle $r_i = r'_i$ setzen wir überdies voraus, dass zwischen den Ausdrücken

$$dF_i, dF'_i, dK_h^{(r_i-1)} \; (h=0,1 \ldots k+r_i-1) \tag{20}$$

bez. im Falle $r_i = 0$, zwischen den Ausdrücken

$$dF_i, dF'_i, (d)_j \; (j=1,2,\ldots k)^{1)} \tag{21}$$

keine lineare Identität bestehe.

Ist jetzt $s^{(n)}$ ein gemeinsamer Streifen n. O. der Gleichungen (1), der keiner der $m+1$ Relationen (4) genügt, so ist ihm entlang ein und nur ein Streifen $s^{(n+r)}$ bestimmt, dessen Elemente $n+r.0.$ die Relationen (8) befriedigen

---

[1]) Vgl. die Anmerkung, pag. 436.

(I, N. 8). Drücken wir die zu $s^{(n+r)}$ gehörigen Grössen $x \ldots \alpha^{(n+r)}_{n+r}$ als Funktionen eines Parameters aus und substituieren diese Werte in die m Funktionspaare F_i, F'_i, so kann man die m Funktionen φ_i auf eine und wesentlich nur eine Weise so bestimmen, dass man für jeden Wert des Parameters identisch hat:

$$\varphi_i(F_i, F'_i) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Diese Bestimmung wäre nur dann unausführbar, wenn sich die beiden Funktionen eines Paars vermöge unserer Substitution auf Constante reducierten, dann aber wäre, wie leicht zu sehen, $s^{(n)}$ eine Charakteristik von (1), was ausgeschlossen wurde. Ist so die Form der Functionen φ_i gefunden, so ist $s^{(n+r)}$ ein gemeinsamer Streifen der Gleichungen (1) und:

$$\varphi_i(F_i, F'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m),$$

welche nach N. 5 und 6 mit (1) zusammen ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_0^{(n+r)}$ bestimmen. Das Letztere wäre nur dann nicht der Fall, wenn einer der Ausdrücke $d\varphi_i$ keine eigentliche integrable Combination des zugehörigen $C_i^{(n+r_i)}$-systems wäre; dann aber hätte man notwendig $r_i = r'_i$, und $s^{(n)}$ genügte einer der Relationen (4) oder es bestände zwischen den Ausdrücken (20) bezw. (21) eine lineare Identität, was unseren Annahmen gleichfalls widerspricht. Da nun die Integralflächen eines Systems $S_0^{(n+r)}$ sich durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmen lassen, da ausserdem auch die Funktionenpaare F_i, F'_i als Integrale solcher Gleichungen erhalten werden (N. 3), so können wir schliesslich den Satz aussprechen:

„Unter den zu Anfang dieser N. gemachten Voraussetzungen kann die Aufsuchung der allgemeinsten Integral-

fläche von (1) durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme geleistet werden." [1])

Existirt nicht für m, sondern nur für λ der $m+1$ Charakteristikensysteme von (1) je ein Funktionenpaar F_i, F_i' der geschilderten Beschaffenheit, so vereinfacht sich die Integration von (1) insoferne, als sie auf die Aufsuchung der Integralflächen gewisser Systeme $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ zurückkommt.

---

[1]) Ersetzt man im Vorstehenden das System (1) durch die einzige Gleichung

$$\delta F^{(n)} = 0$$

(I, N. 1), so erhält man die Integrationstheorie der part. Differentialgleichungen n. O. in 3 Variabeln, im Falle $n=2$ eine Erweiterung der Darboux'schen Theorie, indem die derselben anhaftende Beschränkung auf Functionenpaare gleicher Ordnung aufgehoben erscheint.

Ueber den Eiweissumsatz bei Zufuhr von Antipepton.

Von **Carl Voit.**

(Eingelaufen 22. Januar 1896.)

Herr Dr. Alexander Ellinger hat in meinem Laboratorium Versuche über den Eiweissumsatz bei Zufuhr von Antipepton am Hunde angestellt.

Zu einer Zeit als man glaubte, die Aufnahme der Stoffe aus dem Verdauungsschlauche in die Säfte erfolge einfach durch Osmose, nahm man an, das Eiweiss müsse, bevor es in die Säfte übergehen könne, durch die Verdauung unter Eintritt von Wasser in leicht osmirende Stoffe, in „Peptone" verwandelt werden, da man bei osmotischen Versuchen das gewöhnliche Eiweiss nicht oder nur in minimaler Menge durch eine Membran hindurch gehen sah.

Wenn aber das gewöhnliche Eiweiss nur als „Pepton" resorbirt werden kann, dann muss man annehmen, dass das resorbirte Pepton irgendwo im Körper wieder in gewöhnliches Eiweiss unter Abspaltung von Wasser zurückverwandelt wird.

Ist dies Alles so, so muss das Pepton vollständig und in allen Stücken die Rolle des Eiweisses übernehmen, und man muss im Stande sein mit Pepton unter Zusatz von stickstofffreien Nahrungsstoffen nicht nur den Organismus auf seinem Bestande an Eiweiss zu erhalten, sondern auch einen Ansatz von Eiweiss zu bewirken. Es könnte aber

auch sein, dass das Pepton nur als ein sehr guter Eiweissschützer wirkt, ähnlich oder vielleicht noch besser als der Leim; in diesem Falle würde der Körper stets, trotz reichlicher Peptonfütterung, noch etwas Eiweiss von sich verlieren, und es dürfte kein Stickstoffgleichgewicht der Einnahmen und Ausgaben sowie kein Ansatz von Eiweiss eintreten.

Es ist selbstverständlich, dass man zur Lösung dieser Frage zu dem Pepton kein anderes eiweisshaltiges Nahrungsmittel geben darf; denn in diesem Falle könnte der Ansatz von Eiweiss aus dem Eiweiss dieses Nahrungsmittels erfolgt sein; nur wenn der Ansatz von Eiweiss grösser ist als der Eiweissgehalt jenes Nahrungsmittels, könnte ein sicherer Schluss gezogen werden.

Nach den ersten Ernährungsversuchen mit „Pepton" verschob sich bekanntlich, namentlich durch die Untersuchungen von Kühne, der Begriff dieses Stoffes. Man bezeichnete mit diesem Namen anfangs das Produkt der Verdauung des Eiweisses durch verdünnte Salzsäure und Pepsin. Man lernte aber später Zwischenprodukte zwischen dem Säureeiweiss und dem letzten Produkt der Magenverdauung, dem eigentlichen Pepton (Amphopepton) kennen, nämlich die sogenannten Albumosen; ebenso Zwischenprodukte zwischen dem Globulin und den letzten Verdauungsprodukten der Pankreasverdauung, dem Antipepton und dem Hemipepton, welches letztere bei der weiteren Verdauung zersetzt wird.

Es war also nöthig mit allen diesen Produkten Ernährungsversuche anzustellen.

Adamkiewicz hat mit dem sogenannten Witte'schen Pepton, einem Gemenge von viel Albumosen und wenig Amphopepton, gearbeitet und bei Zugabe von Fett einen geringen Stickstoffansatz beobachtet. Leider erstreckt sich sein Versuch nur auf einen einzigen Tag.

Dann hat Pollitzer Versuche mit Amphopepton und mit zwei Albumosen, der Protalbumose und der Heteroalbumose, angestellt und mit allen drei Stoffen einen Eiweissansatz erhalten; allerdings ist dabei der Harn nicht in einwandfreier Weise aufgesammelt worden.

Endlich hat V. Gerlach mit den Albumosen in dem Witte'schen Präparat und mit dem durch Pankreasverdauung hergestellten Antipepton Versuche gemacht; bei ersterem zeigte sich ein Ansatz von Eiweiss; bei letzterem erhielt er kein Resultat, da der Hund nach Einnahme des Antipeptons erkrankte. Auch hier wurde der Harn nicht direkt aufgefangen.

Alle übrigen Beobachter gaben die verschiedenen Peptonpräparate des Handels mit anderen stickstoffhaltigen Nahrungsmitteln z. B. mit Reis etc., grösstentheils bei Versuchen am Menschen. Sie entschieden daher nur, ob der Körper bei Zufuhr von Eiweiss in anderen Nahrungsmitteln und Zusatz von Pepton sich auf seinem Eiweissgleichgewicht zu erhalten vermag und Ansatz von Eiweiss stattfindet. Diese Versuche sind von hohem Werthe für die Ernährung Kranker, aber sie entscheiden nicht, ob die Peptone vollständig für das Eiweiss eintreten oder nur als ausgezeichnete Eiweissschützer gewirkt haben.

Nach den angegebenen Versuchen erscheint es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass die Albumosen einen Ansatz von Eiweiss bewirken, auch wohl das Amphopepton; aber wie das Antipepton wirkt, das ist noch nicht entschieden.

Diese Frage hat Herr Dr. Ellinger zu beantworten gesucht, da uns von Seiten der Farbwerke von Meister, Lucius und Brüning in Höchst in dankenswerthester Weise das kostbare Material (sogenanntes Drüsenpepton) zur Verfügung gestellt worden war.

Es wurde in den entscheidenden Versuchen bei dem gleichen Hunde das Drüsenpepton in seiner Wirkung mit dem Eiweissrückstand des mittelst Wasser ausgelaugten

Fleisches, mit der Somatose (Albumose), die wir von der Fabrik Bayer und Comp. in Elberfeld bereitwilligst erhalten hatten, und mit Witte'schen Albumosen verglichen.

Es ergab sich bei einem Ueberschuss des Eiweisses des Fleischpulvers und den Witte'schen Albumosen ein Ansatz von Eiweiss am Körper. Von der Somatose wurde viel mit dem Koth entleert, so dass eine dritte Vergleichung nicht möglich war; jedoch wurde so viel gesehen, dass sie ebenfalls das Eiweiss ersetzt. Bei dem Drüsenpepton (Antipepton) trat kein Ansatz von Eiweiss, sondern ein beträchtlicher Verlust von Eiweiss vom Körper ein, so dass das Antipepton nur eiweissschützend wirkt und für das Eiweiss nicht vollständig eintritt.

Das Antipepton ist also wohl schon weiter zersetzt, so dass es im Organismus nicht mehr in Eiweiss zurückverwandelt werden kann. Dieses Resultat steht auch in Uebereinstimmung mit der Angabe von Siegfried über die Fleischsäure, welche wahrscheinlich identisch ist mit dem Antipepton, sowie auch mit den Molekulargewichtsbestimmungen von C. Paals, nach denen das Molekulargewicht des Antipepton's nicht grösser ist als das des Traubenzuckers, während die Albumosen und das Eieralbumin ein viel höheres Molekulargewicht ergaben. Dr. Ellinger hat für das von ihm angewendete Drüsenpepton ebenfalls ein sehr niederes Molekulargewicht erhalten.

Beiträge zur Potentialtheorie.[1])

Von Walther Dyck.

(*Eingelaufen 31. Dezember 1895.*)

II.

Die Gauss'sche Formel für die gegenseitige Umwindung zweier Raumcurven und ihre Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten. Darstellung der Windungszahl zweier Mannigfaltigkeiten durch Kronecker'sche Charakteristiken gewisser Functionensysteme.

Der vorliegende zweite Theil der „Beiträge zur Potentialtheorie“ behandelt zunächst ausführlich die Theorie der Umschlingung zweier geschlossener, sich nicht schneidender Linien im Raume, giebt sodann die Definition der Umschlingung für Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen in einem n-dimensionalen Gebiete und entwickelt die zugehörigen analytischen Formulirungen in Erweiterung der für zwei Curven im Raume gewonnenen Darstellungen.

Im ersten Abschnitte handelt es sich um die genaue Darlegung der Beziehungen des Gauss'schen Integrals für die Anzahl der Umschlingungen zweier Raumcurven zu den im ersten Theile dieser Beiträge (diese

1) Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Juli 1895.

Sitzungsberichte 1895, pag. 261 ff.[1]) entwickelten Formeln für die Kronecker'sche Charakteristik gewisser Functionensysteme.

Indem wir die Raumcurven auf zwei verschiedene Arten, in Parameterform (§ 2) und als Schnitte je zweier Flächen (§ 3), analytisch festlegen, ergeben sich zwei wesentlich verschiedene Functionensysteme mit zwei, beziehungsweise mit drei Variabeln, deren Kronecker'sche Charakteristik mit der Gauss'schen Windungszahl übereinstimmt. Die verschiedenen Integral- und Summenformeln für die Charakteristik, die wir in den „Beiträgen I" aufgestellt haben, führen zu einer Reihe, zum Theil neuer Methoden für die Herleitung der Windungszahl. Dabei sind die für die Parameterdarstellung gewonnenen Formeln, die sich unmittelbar an die Gauss'sche Darstellung anknüpfen lassen, nicht überführbar in die Formeln, welche unter Zugrundelegung der Raumcurven als Schnitt je zweier Flächen aufzustellen sind. Die §§ 4 und 5 sind deshalb dem Beweise der Uebereinstimmung der auf die eine und andere Weise gewonnenen Zahlen gewidmet.

Im zweiten Abschnitte wird zuvörderst (in § 6) die Definition der Anzahl der Windungen einer k-fachen Mannigfaltigkeit um eine $n-k-1$-fache innerhalb eines Gebietes von n unabhängigen Variabeln („im linearen Raume von n Dimensionen" nach der aus der Geometrie übertragenen Redeweise) in directer Analogie mit den durch die analytischen Formulirungen des ersten Abschnittes gewonnenen Formeln aufgestellt.[2])

---

1) Der I. Theil der vorliegenden „Beiträge zur Potentialtheorie" ist im Folgenden kurz durch „Beiträge I" bezeichnet.

2) Es ist mir nicht bekannt, dass die Frage nach der Umschlingung von höheren Mannigfaltigkeiten schon behandelt worden ist. Herr H. Brunn hat (1887) in einer anlässlich seiner Promotion aufgestellten Thesis auf die Möglichkeit, zwei zweidimensionale Gebilde (speciell „Kugelflächen") im Raume von fünf Dimensionen in einander zu schlingen hingewiesen.

Indem wir auch hier für unsere Mannigfaltigkeiten von zwei, den obigen analogen, Darstellungen (in Parameterform (§ 7) und direct durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten (§ 8)) ausgehen, erscheint die Windungszahl als Kronecker'sche Charakteristik für zwei wesentlich verschiedene Systeme von Functionen von $n-1$, beziehungsweise von n Variabeln. Die Uebereinstimmung der auf den beiden Wegen gewonnenen Zahlen wird (in § 8) in analoger Weise wie im ersten Abschnitte bewiesen. Ohne auf die verschiedenen Formeln für die Darstellung der Windungszahl, wie sie nunmehr aus den Entwicklungen des ersten Theiles dieser Beiträge sich ergeben, näher einzugehen, bezeichnen wir zum Schlusse (in § 9) noch eine merkwürdige gegenseitige Lagenbeziehung ganzer Classen von Mannigfaltigkeiten. Mit der Darstellung der k-dimensionalen und der $n-k-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten des n-dimensionalen Raumes ist nämlich gleichzeitig je ein ganzes System von Mannigfaltigkeiten 0ter und $n-1^{\text{ter}}$, 1ter und $n-2^{\text{ter}}$, 2ter und $n-3^{\text{ter}}$ u. s. w. Ordnung gegeben, denen sämmtlich ein und dieselbe Windungszahl zugehört. Diese Beziehung scheint mir besonders geeignet, die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik für die Lagenverhältnisse der verschiedenen durch ein solches Functionensystem zu definirenden Gebilde hervortreten zu lassen.

Erster Abschnitt.

Theorie der gegenseitigen Umwindung zweier Raumcurven.

§ 1.

Das Gauss'sche Integral.

Gauss hat in einer bekannten Notiz vom Jahre 1833 (Werke, Band V, Nachlass, Zur Elektrodynamik, pag. 605), die Anzahl der Umschlingungen zweier geschlossener, sich nicht schneidender Linien M_1' und M_1'' durch das folgende Doppelintegral dargestellt:

$$1)\qquad V = \frac{1}{4\pi} \cdot \int\!\!\int \frac{\begin{vmatrix} z_1'' - z_1' & -dz_1' & dz_1'' \\ z_2'' - z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3'' - z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}}{\sqrt{(z_1''-z_1')^2 + (z_2''-z_2')^2 + (z_3''-z_3')^2}^{\,3}}\ [1];$$

hierbei bezeichnen z_1', z_2', z_3', beziehungsweise z_1'', z_2'', z_3'', die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der ersten, beziehungsweise der zweiten, Linie und ist die Integration über beide Linien ausgedehnt.

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen besitzt eine sehr einfache geometrische Bedeutung, auf welche Schering, von welchem auch die erste Ableitung der Gauss'schen Formel herrührt[2]), aufmerksam gemacht hat. Es stellt

---

[1]) Man vergleiche bezüglich des hier gewählten Vorzeichens der Determinante die am Schlusse dieses Paragraphen folgende Bemerkung.

[2]) Man vergleiche: O. Böddicker, „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Elektrodynamik". Ausführung der Göttinger Inauguraldissertation Böddickers, erschienen 1876 bei Spemann in Stuttgart.

nämlich der Zähler den sechsfachen Inhalt dar des von zwei Linienelementen do_1' beziehungsweise do_1'' der beiden Curven bestimmten Tetraeders, oder den Inhalt eines Parallelepipeds, von welchem drei Seiten durch do_1', do_1'' und durch die Verbindungslinie der Anfangspunkte beider Linienelemente gebildet sind; der Nenner ist gleich der dritten Potenz der Entfernung der beiden Linienelemente von einander.

Für die Ausführung der Integration ist zu beachten, dass hiebei jede der Curven in bestimmter Richtung zu durchlaufen ist. Wir setzen diese dadurch fest, dass wir in beiden Curven je einen (übrigens willkürlichen) Punkt herausgreifen, in diesem die eine der beiden entgegengesetzten Richtungen der Tangente als positive Fortschreitungsrichtung auszeichnen (was durch die Wahl des Vorzeichens der Richtungscosinus an dieser Stelle geschieht) und nun in dieser Richtung die Bogenlängen zählen. Wir haben dann um die Richtung beizubehalten stets im Sinne der wachsenden Bögen fortzuschreiten, d. h. die Bogenelemente:

$$2') \qquad do_1' = \sqrt{dz_1'^2 + dz_2'^2 + dz_3'^2}$$

und

$$2'') \qquad do_1'' = \sqrt{dz_1''^2 + dz_2''^2 + dz_3''^2}$$

sind für die ganze Integration positiv zu nehmen.

Bestehen die Curven aus mehreren getrennten, in sich geschlossenen Theilen, so führt unter Voraussetzung einer gemeinsamen analytischen Definition für die einzelnen Zweige, die Bestimmung der Fortschreitungsrichtung auf e i n e m dieser Züge deren Fixirung auch auf den übrigen Zügen mit sich.

Der Nenner des Ausdruckes unter dem Integralzeichen

$$r^3 = \sqrt{(z_1'' - z_1')^2 + (z_2'' - z_2')^2 + (z_3'' - z_3')^2}^{\,3}$$

ist positiv zu nehmen.

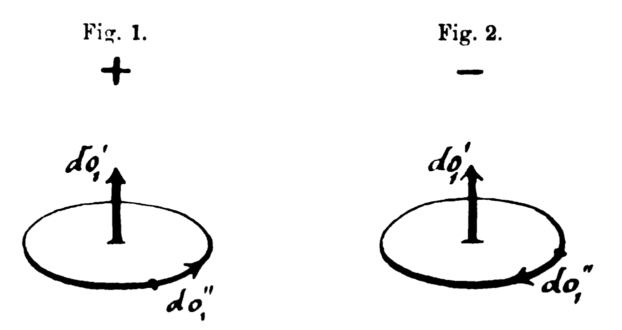
Es sei hier erwähnt, dass wir alle in der Folge auftretenden Quadratwurzelausdrücke positiv annehmen; es ist dies gestattet, weil dieselben unter dem Wurzelzeichen stets eine Summe von Quadraten enthalten, welche im Allgemeinen nicht sämmtlich gleichzeitig in den betrachteten Gebieten verschwinden, so dass also die Wurzel innerhalb des Gebietes ihr Vorzeichen nicht wechselt.

Rechnen wir nun in unserem Coordinatensystem die Richtung der Axe z_1 nach Osten, die von z_2 nach Norden, die von z_3 nach dem Zenith, so gibt das Vorzeichen der Inhaltsdeterminante die folgende Unterscheidung für die gegenseitige Richtung der Elemente do_1' und do_1'':

Stellt man sich in die positive Richtung des Elements do_1' der ersten Curve und blickt auf das Element do_1'' der zweiten Curve, so dreht dieses im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers um do_1', wenn die Determinante

$$3)\qquad \begin{vmatrix} z_1''-z_1' & -dz_1' & dz_1'' \\ z_2''-z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3''-z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}$$

positiv ist (vergl. Fig. 1), im Sinne des Uhrzeigers, wenn diese Determinante negativ ist (Fig. 2). Dieselben Be-



ziehungen ergeben sich dabei, wenn wir von do_1'' nach do_1' blicken [1]).

§ 2.

Formeln für die Windungszahl unter der Voraussetzung, dass die beiden Raumcurven in Parameterdarstellung gegeben sind.

a) Das Gauss'sche Doppelintegral.

Der Gauss'sche Ausdruck für die Windungszahl V lässt sich direct ausführen, wenn man die beiden Linien in Parameterdarstellung gegeben annimmt. Es seien durch

$$4') \quad \begin{aligned} z_1' &= \varphi_1(\lambda_1) \\ z_2' &= \varphi_2(\lambda_1) \\ z_3' &= \varphi_3(\lambda_1) \end{aligned} \qquad \text{und } 4'') \quad \begin{aligned} z_1'' &= \psi_1(\lambda_2) \\ z_2'' &= \psi_2(\lambda_2) \\ z_3'' &= \psi_3(\lambda_2) \end{aligned}$$

die Coordinaten der Punkte unserer beiden Raumcurven dargestellt, abhängig von den Parametern λ_1 bez. λ_2. Wir setzen dabei, der präcisen Ausdrucksweise wegen, die Functionen φ_i und ψ_i als eindeutige, reelle Functionen der reellen unbeschränkt veränderlichen Grössen λ_1 bez. λ_2 voraus;

---

1) Es schien für die vorliegenden Untersuchungen zweckmässig, durch die eben gegebene Auszeichnung des einen der beiden zu einander symmetrischen Coordinatensysteme die Vorzeichen + und — der Determinante in die bestimmte Beziehung zu den Figuren 1 und 2 zu bringen. Dabei habe ich, um für die in der Regel als „positiv" bezeichnete Drehung Fig. 1 auch eine positive Windungszahl zu erhalten, die Gauss'sche Determinante noch mit einem Minuszeichen versehen, welches übrigens bei der Ableitung der zweiten und dritten Colonne der Zählerdeterminante durch Differentiation der ersten Colonne naturgemäss in die Formel eintritt.

die φ_i und ψ_i seien ferner stetig und überall endlich,[1]) und nach den Parametern λ_1, beziehungsweise λ_2, differentiirbar. Die Raumcurven sollen keinen Punkt mit einander gemein haben, d. h. $\psi_1 - \varphi_1$, $\psi_2 - \varphi_2$, $\psi_3 - \varphi_3$ niemals zugleich für dieselben Werthe der λ verschwinden. Ferner sollen niemals gleichzeitig die drei Ableitungen φ_{11}, φ_{21}, φ_{31} der Functionen $\varphi_i(\lambda_1)$ nach λ_1 verschwinden und gleiches für die Ableitungen ψ_{12}, ψ_{22}, ψ_{32} der Functionen $\psi_i(\lambda_2)$ nach λ_2 gelten.

Es ergiebt sich dann unmittelbar für die Windungszahl V das Doppelintegral:

5)
$$V = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 - \varphi_1 & -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{\sqrt{(\psi_1 - \varphi_1)^2 + (\psi_2 - \varphi_2)^2 + (\psi_3 - \varphi_3)^2}^{\,3}} \cdot d\lambda_1 \, d\lambda_2,$$

bei welchem den obigen Voraussetzungen zufolge die Integration über die λ an eine Grenzbedingung nicht mehr gebunden ist.

Um die Richtung für die Integration auf beiden Linien nach den in § 1 gegebenen Bestimmungen festzulegen, wählen wir an einer bestimmten (aber übrigens willkürlichen) Stelle jeder der beiden Curven diejenige Richtung für die Zählung der Bogenlängen, für welche die dem Linienelemente $d\sigma_1'$ (bez. $d\sigma_1''$) an dieser Stelle entsprechende Aenderung $d\lambda_1$ (bez. λ_2) positiv ist. Da nun für die Elemente der beiden Curven

---

1) So dass wir hier, was indess die Allgemeinheit der Betrachtungen nicht wesentlich beschränkt, nur von g a n z i m E n d l i c h e n gelegenen Curven reden.

6')
$$do_1' = \sqrt{\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 + \varphi_{31}^2} \cdot d\lambda_1$$

beziehungsweise

6")
$$do_1'' = \sqrt{\psi_{12}^2 + \psi_{22}^2 + \psi_{32}^2} \cdot d\lambda_2$$

ist, so folgt, da wir die Quadratwurzeln positiv annehmen, dass wir für die Integration im ganzen Gebiete die Elemente $d\lambda_1$ bez. $d\lambda_2$ positiv zu nehmen haben, also, kurz ausgedrückt, dass wir im Sinne der wachsenden Werthe λ_1 und λ_2 über die Curven zu integriren haben.[1])

Aus Formel (5) für V ist nun die Bedeutung der Windungszahl als Kronecker'scher Charakteristik direct zu erschliessen. Die Entwicklungen der §§ 1 und 2 der „Beiträge I" (Formel (12) auf Seite 266) ergeben nämlich unmittelbar den Satz:

Stellt man das Gauss'sche Integral für die Umschlingung zweier Raumcurven mit Hülfe einer Parameterdarstellung (4) der Curven dar, so ist die Windungszahl V gleich der Kronecker'schen Charakteristik des Systems der drei Functionen:

7) $\psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1), \quad \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1), \quad \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),$

der zwei Variabeln λ_1, λ_2.

Deuten wir nach Formel (2) der „Beiträge I" die drei Functionen im Raume der Coordinaten z_1, z_2, z_3,[2])

---

1) Die Darstellung ist in dieser weitläufigen Form mit Rücksicht auf die im Folgenden enthaltenen Ausführungen gegeben.

2) Es ist absichtlich mit Rücksicht auf die folgenden Formeln die Bezeichnung der Coordinaten durch z_i beibehalten; diese treten hier an die Stelle der x_i der Formel (2) in den „Beiträgen I", während die in jener Formel mit z_i bezeichneten Parameter hier durch die λ_i ersetzt sind.



$$
8) \qquad \begin{aligned}
z_1 &= \psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1),\\
z_2 &= \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1),\\
z_3 &= \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),
\end{aligned}
$$

so folgt der Satz:

Die Zahl der gegenseitigen Umwindungen der in (4) dargestellten Raumcurven ist gleich der Zahl der Windungen der Fläche (8) um den Nullpunkt.

Die Fläche (8) ist dabei auf die einfachste Weise geometrisch aus den beiden Curven abzuleiten. Legt man nämlich durch den Nullpunkt des Coordinatensystems Strahlen parallel zu den zweifach unendlich vielen zwischen beiden Raumcurven zu ziehenden Sehnen und schneidet auf diesen Strahlen je die Längen dieser Sehnen (gemessen in der Richtung von der ersten zur zweiten Curve) ab, so bilden die Endpunkte dieser Strahlen eben die Fläche (8).[1])

Die Formeln (8) ergeben weiter, dass die Gestalt der Fläche von einer gegenseitigen durch Parallelverschiebung der beiden Curven hervorgerufenen Lagenveränderung

---

1) Man kann sich auch eine anschauliche Vorstellung von unseren Flächen dadurch verschaffen, dass man sie als „Translationsflächen" auffasst, die sich auf eine zur $M_1'': z_i = \psi_i(\lambda_2)$ congruente und auf eine zweite aus der M_1' durch „Spiegelung am Nullpunkt" entstandene Curve $z_i = -\varphi_i(\lambda_1)$ als Leitcurven beziehen. Herr Finsterwalder hat mehrere Modelle solcher Flächen construirt, die im Brill'schen Verlage erschienen sind. Eines derselben bezieht sich speciell auf zwei in orthogonalen Ebenen gelegenen Kreise als Leitlinien, versinnlicht also gerade den für unsere Betrachtungen elementarsten Fall der gegenseitigen Umschlingung zweier Kreise. Auch Lie, der die Theorie der Translationsflächen in Verbindung mit den entsprechenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgebaut hat (Vergl. neben älteren Untersuchungen die zusammenfassenden Darstellungen in den Berichten der Leipziger Gesellschaft d. W. Bd. 44), veranlasste im Leipziger mathematischen Institut die Herstellung von Modellen gewisser Translationsflächen.

unabhängig ist und dabei nur die Lage der Fläche gegen den Coordinaten-Anfangspunkt geändert wird; die Windungszahlen, welche die Fläche mit Bezug auf die verschiedenen Punkte des Raumes aufweist, geben also zugleich die Windungszahlen der beiden Curven für alle möglichen durch Parallelverschiebung entstehende Lagen.

Die Entwicklungen in den „Beiträgen I" zeigen nunmehr, dass wir sofort noch zwei weitere Darstellungen für die Windungszahl V bilden können, nämlich mit Hülfe eines einfachen Integrals und durch eine Summenformel. Wir betrachten noch kurz diese Darstellungen und ihre geometrische Bedeutung.

b) Darstellung von V durch ein einfaches Integral.

Die Windungszahl lässt sich (nach Formel (26) der „Beiträge I", für $k = 0$) darstellen durch das einfache Integral:

$$9)\qquad V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{((\psi_2 - \varphi_2)^2 + (\psi_3 - \varphi_3)^2) \cdot \sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}} \cdot d o_1,$$

ausgedehnt über

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0,$$

welches die Windungszahl der Schnittcurve der Fläche (8) mit der Ebene

$$z_1 = \psi_1 - \varphi_1 = 0$$

um den Nullpunkt darstellt und in welchem $d o_1$ ein stets positiv zu nehmendes Element bedeutet, welches den beiden Gleichungen:

$$10') \qquad d o_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\varphi_{11}} \cdot d\lambda_2$$

beziehungsweise

$$10'')\qquad d\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\psi_{12}} \cdot d\lambda_1$$

entsprechend für die Ausführung der Integration zu verwenden ist.[1]) Es ergiebt sich dann (indem man die Determinante nach der ersten Horizontalreihe auflöst und die oben genannten Formen für $d\mathfrak{o}_1$ benützt) folgende Form des einfachen Integrals:

$$11)\qquad V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -d\lambda_2 & d\lambda_1 \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{((\psi_2 - \varphi_2)^2 + (\psi_3 - \varphi_3)^2)}.$$

Führen wir hier die Coordinaten z_1', z_2', z_3' beziehungsweise z_1'', z_2'', z_3'' der beiden Raumcurven (4) ein, so können wir auch schreiben:

$$12)\qquad V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ z_2'' - z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3'' - z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}}{((z_2'' - z_2')^2 + (z_3'' - z_3')^2)},$$

das Integral erstreckt über $z_1'' - z_1' = 0$.

---

1) Deutet man die Parameter λ_1, λ_2 als rechtwinklige Coordinaten einer Ebene, so ist $d\mathfrak{o}_1$ nichts anderes als das Linienelement der Curve

$$\psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1) = 0,$$

dargestellt durch seine Projectionen $d\lambda_1$, $d\lambda_2$ auf die Axen. — Ueber diese Deutung der λ, die ich hier nicht weiter verfolge, vergleiche man die Schlussbemerkungen des § 9.

In dieser Form lässt sich die geometrische Bedeutung dieses einfachen Integrals am leichtesten übersehen:

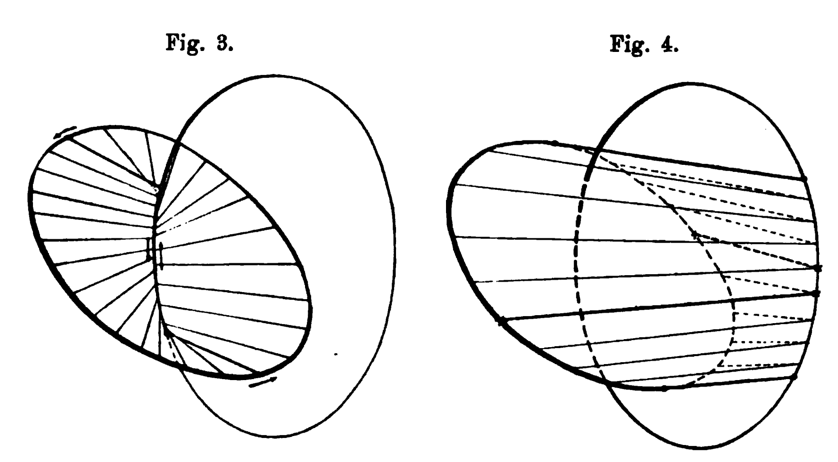
Man denke sich nämlich eine Gerade, stets parallel zur Ebene $z_2\, z_3$ bleibend, an den beiden Curven entlang gleiten, so misst die Anzahl der vollen Umdrehungen, die diese Gerade im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers bei dieser Bewegung beschreibt, die Anzahl der gegenseitigen Umwindungen beider Curven.

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieses Satzes sofort durch Aufstellung des die Umdrehungszahl darstellenden Integrals. Für die anschauungsmässige Verfolgung der Bewegung der Geraden ist dabei noch folgendes zu beachten: Denkt man sich durch die gleitende Gerade eine Ebene parallel zur Ebene $z_2 z_3$ gelegt, so erfährt die Gerade in dieser Ebene die zu messende, drehende Bewegung und gleichzeitig wird die Ebene selbst in Richtung der Axe z_1 parallel verschoben. Besondere Stellen der Bewegung sind nun: Erstens diejenigen, in welchen der Sinn jener Drehung umkehrt; diese sind durch das Verschwinden der Zählerdeterminante unseres Integrals gekennzeichnet. (Vergl. die beiden durch × × bezeichneten Stellen in nebenstehender Figur 4.) Zweitens diejenigen, in welchen die Richtung der Parallelverschiebung der Ebene umkehrt. Die letzteren Stellen sind durch das Verschwinden von ψ_{12} beziehungsweise von φ_{11} gegeben, d. h. durch diejenigen Lagen der sich verschiebenden Ebene, in welchen sie eine der beiden Curven berührt. Berührt dabei die Ebene die **zweite** Curve (ist also $\psi_{12} = 0$), so gleitet die bewegliche Gerade auf dieser im Sinne ihrer augenblicklichen Bewegung fort, während die Bewegung auf der **ersten** Curve direct umkehrt (vergl. die beiden durch ∘ ∘ bezeichneten Stellen in den nebenstehenden Figuren 3 und 4). Dem entspricht analytisch, dass aus der Formel (10') für das positiv zu nehmende Element $d\, o_1$:

$$d\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\psi_{12}} \cdot d\lambda_1$$

folgt, dass mit ψ_{12} gleichzeitig $d\lambda_1$ sein Zeichen wechselt. Ein Gleiches ergiebt sich bezüglich des gleichzeitigen Zeichenwechsels von φ_{11} und $d\lambda_2$. Die beiden Curven werden also im gegenwärtigen Falle nicht (wie im Falle des Doppelintegrals (5)) im Sinne der wachsenden Parameter λ_1 und λ_2 durchlaufen, sondern im Sinne des positiven Elementes $d\mathfrak{o}_1$. Die nebenstehenden Figuren dienen noch zur Versinnlichung des Umstandes, dass nach dem Gesagten bei der Bewegung der gleitenden Geraden im Allgemeinen einzelne Theile der beiden Curven mehrfach in verschiedener Richtung, andere gar nicht von der Geraden überstrichen werden können.

Fig. 3. Fig. 4.



Weiter aber zeigen sie, dass der Verlauf dieser Bewegung sich auch aus mehreren getrennten Cyklen zusammensetzen kann, ohne dass darum die fraglichen Curven aus mehreren Zügen zu bestehen brauchen. Der Sinn, in welchem in diesem Falle die einzelnen Theilbewegungen zu addiren sind, wird festgelegt durch den an einer Anfangsstelle der Be-

wegung auf beiden Raumcurven (gemäss § 2, pag. 454) eingetragenen Richtungssinn, durch welchen auch die Richtung beim Beginne jeder in sich geschlossenen Theilbewegung der Geraden festgelegt wird.

c) Darstellung von V durch eine (Kronecker'sche) Summenformel.

Aus Formel (13) und (14) der „Beiträge I" ergeben sich für V sofort die beiden Summenformeln:

$$\text{13a)} \qquad V = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\}$$

und

$$\text{13b)} \qquad V = \frac{1}{2} \cdot \sum \text{sign.} \left\{ (\psi_3 - \varphi_3) \cdot \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\},$$

wobei die erste Summe sich erstreckt auf alle Punkte, für welche

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \quad \psi_3 - \varphi_3 > 0$$

ist, die letztere auf alle Punkte

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0.$$

Schreiben wir auch diese Formeln direct in den Coordinaten z_i' und z_i'' der beiden Raumcurven, so lauten sie, wenn man rechts noch mit $d\lambda_1 \cdot d\lambda_2$ multiplicirt:

$$\text{14a)} \qquad V = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} \right\}$$

und

$$\text{14b)} \qquad V = \frac{1}{2} \cdot \sum \text{sign.} \left\{ (z_3'' - z_3') \cdot \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} \right\},$$

die Summen ausgedehnt über

$$z_1'' - z_1' = 0, \quad z_2'' - z_2' = 0, \quad z_3'' - z_3' > 0,$$

beziehungsweise über:

$$z_1'' - z_1' = 0, \quad z_2'' - z_2' = 0;$$

dabei ist zu beachten, dass hier dz_i' und dz_i'' diejenigen Aenderungen der Coordinaten bezeichnen, welche positiven $d\lambda_1$ und $d\lambda_2$ entsprechen.

Die geometrische Bedeutung dieser Formeln ist unmittelbar ersichtlich:

Es wird die Windungszahl V bestimmt durch die Punktcharakteristiken der scheinbaren Doppelpunkte, welche das System der beiden Raumcurven vom Zenith aus gesehen (vergl. Seite 452) darbietet.

Dabei ergiebt sich folgende anschauliche Deutung für das Vorzeichen der beiden in der zweiten Summenformel enthaltenen Factoren:

Der erste Factor $z_3'' - z_3'$ entscheidet durch sein Vorzeichen, ob im scheinbaren Doppelpunkt die erste der Curven unterhalb oder oberhalb der zweiten Curve verläuft.

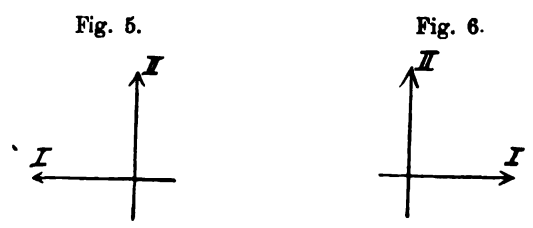
Das Vorzeichen des zweiten Factors, der Determinante:

$$15) \qquad \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 = \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_2'' \\ -dz_1' & dz_2'' \end{vmatrix}$$

trennt die scheinbaren Doppelpunkte in zwei zu einander symmetrische Gattungen in folgender Weise: Man projicire die beiden Curven in der Richtung vom Zenith aus auf die Ebene $z_1\, z_2$ und trage in der Projection die auf der Curve festgesetzte Fortschreitungsrichtung ein. Unterscheidet man dann die beiden Curven wie in den obigen beiden Determinanten als erste und zweite, so entsprechen einem posi-

tiven, beziehungsweise einem negativen Werthe der Determinanten in den scheinbaren Doppelpunkten die durch Fig. 5 und 6

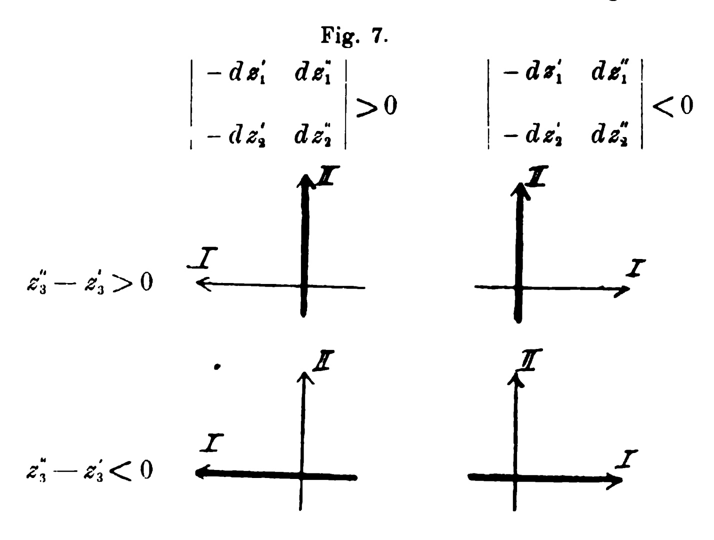
Fig. 5. Fig. 6.



gekennzeichneten beiden Fälle. Die Determinante giebt nämlich den mit dem bekannten Möbius'schen Vorzeichen versehenen doppelten Inhalt des Dreiecks, welches durch die beiden vom scheinbaren Doppelpunkt (im positiven Richtungssinne) auslaufenden Bogenelemente bestimmt ist.

Die Formeln (14a, 14b) zählen also die Windungszahl V ab gemäss der durch die folgende Figur 7 gegebenen Unterscheidung der scheinbaren Doppelpunkte, die wir in ihrer Ansicht in Richtung vom Zenith aus darstellen und wobei die stark gezeichnete Curve dem Beschauer näher liegen soll:

Fig. 7.



Die Formel (14a) erstreckt sich nur über die Punkte, für welche $z_3'' - z_3' > 0$ ist. Dabei lässt sich diese Formel unmittelbar in die andere (14b) überführen, wenn wir beachten, dass

$$16)\quad \sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}\right\} = \sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix}\right\} = 0$$

ist, falls wir die Summation über **alle** scheinbaren Doppelpunkte (die Unterschiede im Sinne der Figuren 5 und 6 genommen) erstrecken. Es entspricht diese hier unmittelbar geometrisch einleuchtende Beziehung der allgemeinen Formel, welche Kronecker für die Vorzeichensumme aller Punktcharakteristiken eines Functionensystems aufgestellt hat (vgl. „Beiträge I", pag. 268).

§ 3.

Formeln für die Windungszahl unter der Voraussetzung, dass die beiden Raumcurven als Schnittlinien je zweier Flächen gegeben sind.

Nimmt man die beiden Raumcurven M_1' und M_1'' je durch zwei Gleichungen zwischen den Variabeln z_1, z_2, z_3 gegeben an und zwar die M_1'' durch:

$$17'')\quad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned}$$

die M_1' analog durch:

$$17')\quad \begin{aligned} F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned}$$

so lässt sich das Gauss'sche Doppelintegral für die Windungszahl nicht allgemein aufstellen. Dagegen treten hier direct die Formeln für die Kronecker'sche Charak-

teristik K des Systems der vier Functionen (mit drei Variabeln)

18) $$F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3 \quad \text{ein.}$$

Es lässt sich aus den geometrischen Entwicklungen, die Kronecker insbesondere in den Abschnitten II und V seiner Abhandlung über Functionensysteme vom März 1869 gegeben hat und in welchen die Charakteristik als Windungszahl einer gewissen ebenen Curve um den Nullpunkt erscheint (vgl. hiezu „Beiträge I“, § 3), die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik als Zahl der gegenseitigen Windungen zweier Raumcurven (im Falle von drei Variabeln) herleiten. Wir gehen indess auf diese Form der Herleitung nicht näher ein, beweisen vielmehr in den folgenden §§ 4 und 5 die Uebereinstimmung der in den §§ 1 und 2 gegebenen Gauss'schen Zahl V mit der im gegenwärtigen § definirten Kronecker'schen Charakteristik K durch eine directe Vergleichung der für V abgeleiteten Summenformel (13a) und der entsprechenden, sogleich zu erwähnenden Summenformel für K (Formel (26a)).

Aus den in den „Beiträgen I“ entwickelten Formeln (12), (26) und (13), (14) ergiebt sich die Darstellung der Zahl K durch ein dreifaches, durch ein zweifaches und durch ein einfaches Integral, sowie durch den Kronecker'schen Summenausdruck, Formeln, die wir der Vollständigkeit halber in Kürze hierher setzen.

a) Das dreifache Integral für K lautet:

19) $$K = \frac{1}{\omega_3} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} F & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}^{\,4}} \cdot d o_3;$$

hier ist

$$do_3 = dz_1 \cdot dz_2 \cdot dz_3 \tag{20}$$

das positiv zu nehmende Element der Integration und die Integration über die Gesammtheit der reellen Werthe z_1, z_2, z_3 zu erstrecken.

b) Um die Darstellung durch ein zweifaches Integral zu erhalten, zeichnen wir eine der Functionen F_i z. B. F_0 aus und es folgt dann

$$K = \frac{1}{\omega_2} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}^3 \cdot \sqrt{F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2}} \cdot do_2, \tag{21}$$

wo do_2 das stets positiv zu nehmende Element der Fläche $F_0 = 0$, über welche die Integration zu erstrecken ist, bezeichnet. Für die Integration ist es zweckmässig, do_2 in den drei verschiedenen Formen

$$do_2 = \frac{\sqrt{F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2}}{F_{0i}} \cdot dz_k \cdot dz_l \tag{22}$$

$$i, k, l = 1, 2, 3$$

anzunehmen.

c) Das einfache Integral erstreckt sich über eine der in Betracht kommenden Curven, z. B. über $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, in welchem Falle wir erhalten:

$$23)\qquad K=\frac{1}{\omega_1}\cdot\int\frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33}\end{vmatrix}}{\sqrt{F_2^2+F_3^2}^2\cdot\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ F_{11} & F_{12} & F_{13}\end{Vmatrix}^2}}\cdot do_1,$$

wobei do_1 das stets positiv zu nehmende Linienelement der Curve $F_0=0$, $F_1=0$ bezeichnet, welches für die Integration (beim Auflösen der Zählerdeterminante nach den Unterdeterminanten der Matrix der ersten beiden Reihen) zweckmässig in den Formen

$$24)\qquad do_1=\frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ F_{11} & F_{11} & F_{12}\end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{0k} & F_{0l}\\ F_{1k} & F_{1l}\end{vmatrix}}\cdot dz_i \qquad i,k,l=1,2,3$$

anzunehmen ist.

Die Factoren ω_1, ω_2, ω_3 der drei Integralausdrücke sind beziehungsweise:

$$25)\qquad \omega_3=2\pi^2,\qquad \omega_2=4\pi,\qquad \omega_1=2\pi.$$

d) Als Summenformel zur Darstellung von K endlich ergeben sich, wenn wir die Functionen F_0, F_1, F_2 vor der letzten F_3 auszeichnen, die Formeln:

$$26a)\qquad K=-\sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23}\end{vmatrix}\right\},$$

und

$$26\text{b)}\qquad K = \frac{1}{2}\cdot\Sigma\,\text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ 0 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}\right\},$$

die erstere Summe erstreckt über die Punkte, für welche

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 > 0$$

ist, die letztere ausgedehnt über die Punkte

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0.$$

Man hat dabei die Relation

$$27)\qquad \Sigma\,\text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix}\right\} = 0,$$

falls die Summe über alle Punkte

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0$$

erstreckt wird.

Bezüglich der geometrischen Bedeutung der vorstehenden Integralformeln sei auf die Entwicklungen der „Beiträge I“ verwiesen. Auf die Discussion der Summenformeln haben wir sogleich einzugehen.

§ 4.

Ableitung einer neuen Formel für die Bestimmung der Charakteristik K.

Es handelt sich nunmehr in den folgenden §§ 4 und 5 darum, die Uebereinstimmung der Zahl V (der §§ 1 und 2) mit der jetzt (in § 3) betrachteten Zahl K zu erweisen.

Zunächst stehen, wie schon die geometrische Bedeutung der verschiedenen Ausdrücke erkennen lässt, die für beide gewonnenen Formeln in keiner directen Beziehung zu einander. Um sie mit einander in Verbindung zu bringen und ihre gegenseitige Stellung zu kennzeichnen, verfahren wir folgendermassen:

Wir knüpfen an die beiden Summenformeln (13a) und (26a) für V und K an und zeigen, dass die in diesen Formeln dargestellten Zahlen an denselben Stellen und in gleichem Sinne sich ändern, wenn wir die gegenseitige Lage der Curven M_1' und M_1'' durch Bewegung derselben abändern. Nunmehr bringen wir beide Curven, ohne sie zu deformiren, in eine solche Lage, dass sie keinerlei gegenseitige Verschlingung mehr besitzen (was unter Voraussetzung von ganz im Endlichen gelegenen Curven stets möglich ist); für diese Lage ist V sowohl wie K gleich Null. Bewegen wir von dieser Ausgangslage der Zählung aus die Curven in ihre ursprüngliche Lage zurück, so ändern sich die beiden Zahlen in gleicher Weise und damit folgt schliesslich für die Endlage:

28) $$V = K.$$

Gleichzeitig aber gewinnen wir in dieser Abzählung der Aenderungen der Zahlen V, beziehungsweise K im Laufe der Bewegung der Curven M_1' und M_1'' gegen einander eine neue Methode zur Bestimmung unserer Windungszahl.[1])

1) Die hier angewendete Methode der Abzählung einer Charakteristik hat Kronecker ganz allgemein formulirt mittelst der Einführung willkürlicher Parameter in die Functionen des Systems; er hat bei dieser Gelegenheit auf die durch die Einführung eines Parameters gegebene Möglichkeit einer Abzählung der Charakteristik mit Hülfe des Sturm'schen Verfahrens hingewiesen. Vergl. Berliner Monatsberichte vom 21. Febr. 1878, pag. 147, 148.



Zur rechnerischen Darlegung wählen wir speciell für die Veränderung der gegenseitigen Lage der beiden Curven eine Verschiebung der Curve M_1'' in Richtung der Axe z_3, bei festgehaltener Curve M_1'.

Wir betrachten zunächst die Summenformel (13a)

$$\text{13a)} \qquad V = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe ausgedehnt über:

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \qquad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \qquad \psi_3 - \varphi_3 > 0.$$

Die Curve M_1'' sei um die Strecke C in Richtung der negativen Axe z_3 verschoben, so dass also für die verschobene Curve

$$\text{29)} \qquad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1, \\ z_2 &= \psi_2, \\ z_3 &= \psi_3 - C \end{aligned}$$

ist. Wählen wir nun C so gross, gleich C_0, dass für alle scheinbaren Doppelpunkte $\psi_1 - \varphi_1 = 0$, $\psi_2 - \varphi_2 = 0$ der beiden Curven stets

$$(\psi_3 - C_0) - \varphi_3 < 0$$

ist, so wird die einer solchen Lage der beiden Curven entsprechende Zahl $V_{C_0} = 0$ sein, weil alle scheinbaren Doppelpunkte aus dem Bereich der Abzählung gerückt sind. Von hier ab also als Ausgangslage haben wir die Zählung zu beginnen und nunmehr C von C_0 bis 0 abnehmen zu lassen. Passiren wir nun, die Curve M_1'' in der positiven Richtung der Axe z_3 an die feste Curve M_1' heranschiebend, mit einem Zweige der M_1'' die M_1', so tritt an einer solchen Stelle $C = \overline{C}$, für welche also

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \qquad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \qquad (\psi_3 - \overline{C}) - \varphi_3 = 0$$

ist, der betreffende scheinbare Doppelpunkt in den Bereich unserer Abzählung ein, weil hier die Function $(\psi_3 - C) - \varphi_3$ von einem negativen zu einem positiven Zahlwerth übergeht. Der Werth von V wird also an einer solchen Stelle:

um 1 vermehrt, wenn für diesen Punkt $\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} > 0$
um 1 vermindert, wenn für diesen Punkt $\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} < 0$

ist. Die im Laufe der Bewegung von $C = C_0$ mit abnehmendem C bis $C = 0$ an den Durchgangspunkten der beweglichen Curve durch die feste Curve eingetretenen Aenderungen ergeben also für die Endlage der beiden Curven die Zahl V ausgedrückt genau durch die obige Summenformel (13a).

Zu einer neuen Summenformel werden wir dagegen geführt, wenn wir dieselbe Betrachtung unter der Voraussetzung der Definition unserer Curven durch die Gleichungen $F_i = 0$ durchführen.

Es handelt sich hier um die Summenformel (26a)

$$\text{26a)} \qquad K = -\sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe ausgedehnt über

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 > 0.$$

Die Verschiebung der Curve M_1'' in Richtung der negativen Axe z_3 um den Betrag C giebt für die verschobene Curve die Gleichungen:

$$\text{30)} \qquad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0. \end{aligned}$$

Wählt man also, alle Flächen $F_i = 0$ als ganz im Endlichen liegend vorausgesetzt, nur C gross genug, gleich C_0, so werden sämmtliche Punkte der verschobenen Curve M_1'' kleinere Ordinaten besitzen, als die Punkte der festen Fläche $F_2 = 0$ und damit auch kleinere, als die Punkte der auf ihr liegenden festen Curve M_1'. Dann ergiebt sich für einen solchen Werth C_0 von C die Zahl $K_{C_0} = 0$, weil die Gleichungen

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_2(z_1, z_2, z_3) = 0$$

keine reellen gemeinsamen Lösungen mehr besitzen.

Von dieser Lage $C = C_0$ als Anfangslage aus verschieben wir nun wieder die Curve M_1'' in der Richtung der positiven Axe z_3; es handelt sich dann darum, zu bestimmen, an welchen Stellen $\overline{C}$ die durch die folgende Formel gegebene Zahl K_C sich ändert.

$$\text{31)} \quad K_C = -\sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01}(z_1, z_2, z_3+C) & F_{02}(z_1, z_2, z_3+C) & F_{03}(z_1, z_2, z_3+C) \\ F_{11}(z_1, z_2, z_3+C) & F_{12}(z_1, z_2, z_3+C) & F_{13}(z_1, z_2, z_3+C) \\ F_{21}(z_1, z_2, z_3) & F_{22}(z_1, z_2, z_3) & F_{23}(z_1, z_2, z_3) \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe ausgedehnt über alle Werthe

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0,$$
$$F_2(z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad F_3(z_1, z_2, z_3) > 0.$$

Zunächst treten von $C = C_0$ an je paarweise gemeinsame Lösungen der Gleichungen

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_2(z_1, z_2, z_3) = 0$$

auf an den Berührungsstellen der sich verschiebenden Curve M_1'' mit der festen Fläche $F_2 = 0$, beziehungsweise verschwinden je zwei solche Punkte, die im Laufe der Bewegung der Curve M_1'' entstanden sind, wieder. An diesen Stellen ist die Determinante in der obigen Formel (31) für K_C gleich

Null, während sie für die beiden im Berührungspunkte zusammenrückenden Schnittpunkte der Curve mit der Fläche $F_2 = 0$ (wenn wir von singulären Vorkommnissen, wie dies hier stets geschieht, absehen) je verschiedenes Vorzeichen aufweist. Diese Stellen üben also keinen Einfluss auf die Zahl K_C aus.

Wenn dagegen ein Zweig der Curve M_1'' die feste Curve M_1' passirt, d. h. an den Stellen, für welche die Gleichungen

$$
32)\qquad
\begin{aligned}
F_0(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0 \\
F_1(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0 \\
F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0 \\
F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0
\end{aligned}
$$

gemeinsame Lösungen besitzen, tritt eine Aenderung in der Abzählung ein, insoferne ein Punkt, für welchen die drei ersten Gleichungen erfüllt sind, entweder aus einem Gebiete, in welchen $F_3 < 0$ ist, in das Gebiet $F_3 > 0$ eintritt und dadurch bei der Abzählung gemäss Formel (31) neu hinzukommt, oder umgekehrt aus $F_3 > 0$ in das Gebiet $F_3 < 0$ eintritt und dadurch für die Abzählung in Wegfall kommt. Eine solche Stelle ist also im ersten Falle mit ∓ 1 für die Bildung der Zahl K in Rechnung zu setzen je nachdem die Determinante in der Formel für K_C an dieser Stelle $\gtrless 0$ ist, im zweiten Falle dagegen mit ± 1.

Nun seien $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ die Coordinaten, $\bar{C}$ der Parameter in einem solchen Durchgangspunkt der beweglichen Curve M_1'' durch die feste Curve M_1'; vor dieser Lage kommt der beweglichen Curve der Parameter $\bar{C} + dC$, nach derselben der Parameter $\bar{C} - dC$ zu, wo nach unserer Annahme über die Richtung der Verschiebung (von $C = C_0$ bis $C = 0$), dC eine positive Aenderung bezeichnet. Die Coordinaten, bez. der Parameter für den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der drei Flächen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ vor und nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle sind

$$\bar{z}_1 \pm dz_1, \qquad \bar{z}_2 \pm dz_2, \qquad \bar{z}_3 \pm dz_3, \qquad \bar{C} \pm dC$$

wobei, wie sich direct ergiebt:

$$33) \qquad dz_1 : dz_2 : dz_3 : dC = \left\| \begin{matrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Der Unterschied, ob beim Durchgang durch die singuläre Stelle der Schnittpunkt der drei Flächen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ aus einem Gebiet $F_3 < 0$ in ein Gebiet $F_3 > 0$ rückt oder ob das umgekehrte statthat, wird durch das positive oder negative Vorzeichen des Werthes von

$$34) \qquad -(F_{31}\, dz_1 + F_{32}\, dz_2 + F_{33}\, dz_3),$$

(die $(-dz_i)$ als die Aenderungen der z_i nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle gerechnet), entschieden, also mit Berücksichtigung der obigen Werthe für die dz_i durch das Vorzeichen des Determinantenquotienten:

$$35) \qquad - \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix} ;$$

Nun ist aber nach Seite 473 für die Abzählung der Durchgangspunkte ∓ 1 in Rechnung zu setzen, je nachdem der Ausdruck (35) und die Determinante in (31), d. i. die Nennerdeterminante von (35), gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Die an einer solchen Stelle erfolgende Aenderung der Zahl K_C ergiebt sich also zu ± 1, je nachdem die Zählerdeterminante einen positiven oder negativen Werth besitzt.

Danach ergiebt sich also für die Abzählung der Zahl K durch die Summation sämmtlicher Aenderungen, welche die Zahl K_C von $C = C_0$ bis $C = 0$ erleidet, die folgende neue Formel:

$$36)\qquad K = \sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix}\right\},$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0,$$
$$F_2(z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad F_3(z_1, z_2, z_3) = 0$$

und

$$C > 0$$

ist.

Man erkennt dabei sofort, dass K sich durch diese Formel darstellt als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der fünf Functionen

$$37)\qquad \begin{matrix} F_0(z_1, z_2, z_3 + C), & F_1(z_1, z_2, z_3 + C), & \\ F_2(z_1, z_2, z_3), & F_3(z_1, z_2, z_3), & C \end{matrix}$$

mit den vier Variabeln z_1, z_2, z_3, C, und kann sich, davon ausgehend, auch direct von der Uebereinstimmung der in den Formeln (26a) und (36) gewonnenen Zahlen überzeugen.

Man hat zu dem Ende nur die Kronecker'sche Summenformel zu bilden für die Functionen:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad C = 0, \qquad F_3 > 0,$$

um unmittelbar Formel (26a) zu erhalten. Dabei ist für die Bestimmung des Vorzeichens die Vertauschung der Reihenfolge der Functionen F_3 und C zu berücksichtigen.

§ 5.

Beweis der Uebereinstimmung der Zahlen V und K.

Mit Hülfe der neuen Formel für die Bestimmung der Zahl K ist nun der Uebergang von dieser zu der aus dem System der Functionen $\psi_1 - \varphi_1$, $\psi_2 - \varphi_2$, $\psi_3 - \varphi_3$ abgeleiteten Zahl V gegeben. Das Vorzeichen der Determinante

$$38)\qquad \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

unterscheidet nämlich die scheinbaren Doppelpunkte der beiden Curven M_1' und M_1'' (genommen in der Richtung der Axe z_3) in demselben Sinne, wie das Vorzeichen der Determinante

$$39)\qquad \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix},$$

von dessen Bedeutung wir in § 2 (pag. 462) gehandelt haben.

Die letztere Determinante trennt nämlich die scheinbaren Doppelpunkte nach dem Vorzeichen des kleinen Flächenelements, welches bei Projection der auf den beiden Curven im scheinbaren Doppelpunkt angenommenen Linienelemente do_1' und do_1'' auf die Ebene $z_1\, z_2$ entsteht. Dabei sind beide Curven im Sinne der wachsenden Parameter durchlaufen angenommen. Sind nun die beiden Raumcurven durch die Gleichungen $F_i = 0$ gegeben, so hat man für die dz_1', dz_2', dz_3' der ersten Curve

$$40')\qquad \begin{aligned} F_{21}\, dz_1' + F_{22}\, dz_2' + F_{23}\, dz_3' &= 0, \\ F_{31}\, dz_1' + F_{32}\, dz_2' + F_{33}\, dz_3' &= 0. \end{aligned}$$

und für die zweite Curve analog:

$$40'')\qquad \begin{aligned} F_{01}\,dz_1'' + F_{02}\,dz_2'' + F_{03}\,dz_3'' &= 0,\\ F_{11}\,dz_1'' + F_{12}\,dz_2'' + F_{13}\,dz_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Führt man diese Beziehungen ein, so folgt nach kurzer Umrechnung für den Inhalt jenes kleinen Elementes:

$$41)\qquad \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2$$

$$= \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{dz_3'}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \cdot \frac{dz_3''}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}}$$

Nun gilt aber für die positiv zu nehmenden Linienelemente beider Curven:

$$42')\qquad do_1' = \sqrt{\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 + \varphi_{31}^2} \cdot d\lambda_1 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \cdot dz_3',$$

$$42'')\qquad do_1'' = \sqrt{\psi_{12}^2 + \psi_{22}^2 + \psi_{32}^2} \cdot d\lambda_2 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}} \cdot dz_3''.$$

Nehmen wir also (wie stets) die Quadratwurzeln aus den Quadratsummen positiv, so sind für die Summation

zugleich mit $d\lambda_1$, beziehungsweise $d\lambda_2$ auch die beiden Ausdrücke:

$$43)\qquad \frac{dz_3'}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad \frac{dz_3''}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}}$$

positiv zunehmen[1]), d. h. für alle Elemente der Summation ist:

$$44)\qquad \operatorname{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix}\right\} = \operatorname{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \operatorname{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix}\right\}.$$

Es kommen somit für die Abzählung der Zahlen V und K durch die Formeln (13a) und (36) dieselben Punkte,

1) Man bemerkt unmittelbar, dass diese Vorzeichenbestimmung genau übereinstimmt mit der durch das Kronecker'sche „Fortgangsprincip" (Berichte der Berliner Akademie vom März 1869, pag. 160) gegebenen. Nach der Kronecker'schen Regel ist die Fortgangsrichtung auf den beiden Curven so zu wählen, dass die Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \cdot d\Phi \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} \cdot d\Phi$$

stets positiv sind; ersetzt man für die beiden Ausdrücke die willkürliche Function $\Phi(z_1, z_2, z_3)$ durch z_3, so ergeben sich die obigen Bedingungen.

nämlich die bei der Bewegung von M_1 gegen M_1' auftretenden wirklichen Doppelpunkte, genommen beiderseits mit denselben Vorzeichen in Rechnung. Damit ist aber die Identität der nach den Formeln (13a), (26a) und (36) gewonnenen Zahlen V und K bewiesen.

Wir fassen das Resultat der vorliegenden Untersuchung zusammen in dem Satze:

Die Zahl der gegenseitigen Umschlingungen zweier Raumcurven im Gauss'schen Sinne ist identisch mit der Kronecker'schen charakteristischen Zahl des Functionensystems:

$$7) \quad \psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1), \quad \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1), \quad \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),$$

beziehungsweise des Functionensystems:

$$18) \quad F_0(z_1, z_2, z_3), \quad F_1(z_1, z_2, z_3), \quad F_2(z_1, z_2, z_3), \quad F_3(z_1, z_2, z_3),$$

wenn

$$4) \quad \begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(\lambda_1), \\ z_2 &= \varphi_2(\lambda_1), \\ z_3 &= \varphi_3(\lambda_1), \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1(\lambda_2), \\ z_2 &= \psi_2(\lambda_2), \\ z_3 &= \psi_3(\lambda_2), \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$17) \quad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0 \end{aligned}$$

die zur analytischen Darstellung der beiden Curven dienenden Gleichungen sind.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der gegenseitigen Umwindung k-dimensionaler und $n-k-1$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten im linearen Gebiete von n Dimensionen.

§ 6.

Verallgemeinerung des Gauss'schen Integrals für Gebiete von n Dimensionen.

Die Gauss'sche Formel für die Zahl der gegenseitigen Umwindungen zweier Raumcurven und ihre Darstellung als Kronecker'sche Charakteristik eines zugehörigen Functionensystems lässt nun die nachfolgende Erweiterung für höhere Mannigfaltigkeiten naturgemäss erscheinen:

Es seien im Gebiete von n reellen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ die wir (zu kurzer Sprechweise) als rechtwinklige Coordinaten des linearen Raumes L_n von n Dimensionen bezeichnen und deuten wollen, je zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} von k, beziehungsweise von $n-k-1$ Dimensionen gegeben; so definiren wir als gegenseitige Windungszahl V der beiden Mannigfaltigkeiten den Werth des Integrals:

$$
45)\quad V=\frac{1}{\tilde{\omega}_{n-1}}\cdot\int\limits_{M''_{n-k-1}}\int\limits_{M'_k}\frac{\begin{vmatrix} z''_1-z'_1 & -\overset{(1)}{dz'_1} & -\overset{(2)}{dz'_1}\ldots-\overset{(k)}{dz'_1} & \overset{(k+1)}{dz''_1} & \overset{(k+2)}{dz''_1}\ldots\overset{(n-1)}{dz''_1} \\ z''_2-z'_2 & -\overset{(1)}{dz'_2} & -\overset{(2)}{dz'_2}\ldots-\overset{(k)}{dz'_2} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \overset{(k+2)}{dz''_2}\ldots\overset{(n-1)}{dz''_2} \\ z''_3-z'_3 & -\overset{(1)}{dz'_3} & -\overset{(2)}{dz'_3}\ldots-\overset{(k)}{dz'_3} & \overset{(k+1)}{dz''_3} & \overset{(k+2)}{dz''_3}\ldots\overset{(n-1)}{dz''_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\ldots\;\cdot & \cdot & \cdot\;\ldots\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\ldots\;\cdot & \cdot & \cdot\;\ldots\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\ldots\;\cdot & \cdot & \cdot\;\ldots\;\cdot \\ z''_n-z'_n & -\overset{(1)}{dz'_n} & -\overset{(2)}{dz'_n}\ldots-\overset{(k)}{dz'_n} & \overset{(k+1)}{dz''_n} & \overset{(k+2)}{dz''_n}\ldots\overset{(n-1)}{dz''_n} \end{vmatrix}}{\sqrt{(z''_1-z'_1)^2+(z''_2-z'_2)^2+(z''_3-z'_3)^2+\ldots+(z''_n-z'_n)^2}^{\,n}}
$$

Die Integration erstreckt sich dabei für die Variabeln $z'_1 \ldots z'_n$ über die Mannigfaltigkeit M'_k, für die Variabeln $z''_1 \ldots z''_n$ über die Mannigfaltigkeit M''_{n-k-1}. $\tilde{\omega}_{n-1}$ bezeichnet die $n-1$-dimensionale Oberfläche der „Kugel" vom Radius 1

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = 1.$$

Ehe wir zeigen, dass durch dieses Integral, ausgedehnt über zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten, eine ganze Zahl dargestellt wird, betrachten wir die Bedeutung des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes.

Ausgehend vom Punkte

$$z'_1,\quad z'_2,\quad z'_3\quad \ldots\quad z'_n$$

der M'_k sind auf dieser Mannigfaltigkeit in bestimmter Reihenfolge k Nachbarpunkte:

$$z'_1+\overset{(i)}{dz'_1},\quad z'_2+\overset{(i)}{dz'_2}\quad z'_3+\overset{(i)}{dz'_3}\;\ldots\; z'_n+\overset{(i)}{dz'_n}\quad i=1,2,\ldots k$$

angenommen. Ebenso, vom Punkte

$$z''_1,\quad z''_2,\quad z''_3,\quad \ldots\quad z''_n$$

der M''_{n-k-1} ausgehend, auf dieser $n-k-1$ Nachbarpunkte

$$z''_1+\overset{(j)}{dz''_1}\quad z''_2+\overset{(j)}{dz''_2}\quad z''_3+\overset{(j)}{dz''_3}\ldots\quad z''_n+\overset{(j)}{dz''_n}\quad j=k+1,\ldots n-1.$$

Diese $n+1$ Punkte bilden die Eckpunkte eines dem Tetraeder im dreidimensionalen Raume analogen Körpers im L_n, welchen wir analog wie das Tetraeder zum Parallelepiped zu einem parallelepipedischen Element do, dessen Eckpunkte sich aus den oben gegebenen durch Addition der Coordinaten ergeben, ergänzen können. Der Inhalt dieses Körpers ist durch die Zählerdeterminante des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes dargestellt. Die in der M'_k liegende Gruppe von $k+1$ Punkten bestimmt dabei ein parallelepipedisches Element der M'_k, do'_k, und ebenso die in der M''_{n-k-1} liegende Gruppe von $n-k$ Punkten ein solches Element do''_{n-k-1} dieser Mannigfaltigkeit. Im Nenner des Ausdruckes steht die (absolut zu nehmende) n^{te} Potenz der Entfernung r der beiden Elemente do'_k und do''_{n-k-1} von einander, die wir auch als den Inhalt des „n dimensionalen Würfels" von der Kantenlänge r deuten können.

Für die Integration über die beiden Mannigfaltigkeiten setzen wir in Analogie mit der für das Gauss'sche Integral zu beachtenden Bestimmung fest, dass die Elemente

$$46') \qquad do'_k = \sqrt{\begin{vmatrix} \overset{(1)}{dz'_1} & \overset{(1)}{dz'_2} & \overset{(1)}{dz'_3} & \dots & \overset{(1)}{dz'_n} \\ \overset{(2)}{dz'_1} & \overset{(2)}{dz'_2} & \overset{(2)}{dz'_3} & \dots & \overset{(2)}{dz'_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \overset{(k)}{dz'_1} & \overset{(k)}{dz'_2} & \overset{(k)}{dz'_3} & \dots & \overset{(k)}{dz'_n} \end{vmatrix}^2}$$

und

$$46'') \qquad do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{vmatrix} \overset{(k+1)}{dz''_1} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \overset{(k+1)}{dz''_3} & \dots & \overset{(k+1)}{dz''_n} \\ \overset{(k+2)}{dz''_1} & \overset{(k+2)}{dz''_2} & \overset{(k+2)}{dz''_3} & \dots & \overset{(k+2)}{dz''_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \overset{(n-1)}{dz''_1} & \overset{(n-1)}{dz''_2} & \overset{(n-1)}{dz''_3} & \dots & \overset{(n-1)}{dz''_n} \end{vmatrix}^2}$$

der M'_k bezw. M''_{n-k-1} in unserem ganzen Gebiete niemals verschwinden sollen, dass also niemals gleichzeitig die sämmtlichen Unterdeterminanten einer der Matrices Null sein sollen.[1]) (Vergl. die Bemerkung auf pag. 452).

Das Vorzeichen der Determinante im Zähler unseres Integrals unterscheidet dann in analoger Weise wie im Gebiete von drei Dimensionen zwei wesentlich verschiedene Lagen der Elemente do'_k und do''_{n-k-1} gegen einander, die wir in Analogie mit der dort gegebenen geometrischen Vorstellung als „im entgegengesetzten Sinne windend" bezeichnen wollen. Wesentlich ist dabei der durch die Reihenfolge der k bezw. $n-k-1$ Fortschreitungsrichtungen (die durch die $\overset{(i)}{dz'}$ bezw. $\overset{(j)}{dz''}$ definirt sind) in die Elemente do'_k und do''_{n-k-1} gelegte Sinn. Dieser Richtungssinn ergiebt sich für die ganze Mannigfaltigkeit M'_k bezw. M''_{n-k-1} in eindeutig bestimmter Weise, wenn er für ein bestimmtes, aber übrigens beliebiges Element von M'_k bezw. M''_{n-k-1} festgelegt ist. Man vergleiche für diese Festlegung die Formeln (49) und (64).

Durch unsere Annahmen über die Möglichkeit der eindeutigen Festlegung des Richtungssinnes schliessen wir die sogenannten „Doppelmannigfaltigkeiten", bei welchen man in dem hier entwickelten Sinne von einer Windungszahl nicht sprechen kann, von der gegenwärtigen Betrachtung aus.

Es ist noch folgender Umstand bemerkenswerth: Wir konnten dem positiven und negativen Vorzeichen der Determinante in Formel (45) im Falle zweier Raumcurven eine ganz bestimmte Lagenbeziehung der beiden gerichteten Elemente do'_1 und do''_1 der Raumcurven an die Seite stellen

1) Es genügt übrigens schon, anzunehmen, dass die Unterdeterminanten je einer der beiden Matrices in (46') und (46") nicht sämmtlich zugleich für Gebiete von $k-1$ bezw. von $n-k-2$ Dimensionen auf M'_k bezw. M''_{n-k-1} verschwinden.



(Fig. 1 und 2, pag. 452), welche gegenseitig umkehrbar war.

Im Falle zweier Mannigfaltigkeiten von k bezw. $n-k-1$ Dimensionen ist diese Beziehung nicht mehr in allen Fällen eine gegenseitig umkehrbare.

Vertauschen wir nämlich in der Formel (45) die beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} miteinander, so erhält, wenn wir die Reihenfolge der Linienelemente auf beiden festhalten, die Determinante das Vorzeichen

$$(-1)^{n \cdot n-k},$$

die Determinante behält also bei der Vertauschung das Vorzeichen, wenn

n gerade, k gerade oder ungerade
n ungerade, k ungerade

ist; d. h. in diesen Fällen ist die Windung des Elementes do'_k gegen das Element do''_{n-k-1} dieselbe, wie die Windung des Elementes do''_{n-k-1} gegen do'_k. Dagegen wechselt für

n ungerade, k gerade

die Determinante ihr Vorzeichen, d. h. die Windung des Elementes do'_k gegen do''_{n-k-1} ist entgegengesetzt gleich der Windung des Elementes do''_{n-k-1} gegen do'_k. Die Windungszahl der geschlossenen Mannigfaltigkeiten selbst wechselt also für ungerades n und gerades k bei der Vertauschung derselben ihr Vorzeichen.

§ 7.

Formeln für die Windungszahl unter Voraussetzung einer Parameterdarstellung für die beiden Mannigfaltigkeiten.

Wir legen analog wie für die beiden Raumcurven jetzt für unsere Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} eine Parameterdarstellung zu Grunde durch die Gleichungssysteme:

$$
47') \quad \begin{aligned}
z'_1 &= \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
z'_2 &= \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
&\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot\\
z'_n &= \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),
\end{aligned}
$$

beziehungsweise:

$$
47'') \quad \begin{aligned}
z''_1 &= \psi_1(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),\\
z''_2 &= \psi_2(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),\\
&\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot\\
z''_n &= \psi_n(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),
\end{aligned}
$$

in welchen die Functionen φ bez. ψ wieder als eindeutige reelle Functionen der reellen, von einander unabhängigen Veränderlichen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k;\ \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}$ vorausgegesetzt sind.

Wählen wir jetzt zum Punkte z'_μ auf M'_k gerade die k Nachbarpunkte $z'_\mu + \overset{(i)}{d} z'_\mu$, welche entstehen, wenn wir nur je einen der Parameter λ_μ um den positiven Betrag $d\lambda_\mu$ ändern und verfahren in gleicher Weise im Punkte z''_ν auf M''_{n-k-1}, so setzt sich unser obiges Integral (45) direct um in die Form:

$$
48) \quad V = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n-1}} \cdot \int\limits_{M''_{n-k-1}} \int\limits_{M'_k} \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 - \varphi_1 & -\varphi_{11} \cdots -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} \cdots \psi_{1\,n-1} \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} \cdots -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} \cdots \psi_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ \psi_n - \varphi_n & -\varphi_{n1} \cdots -\varphi_{nk} & \psi_{n\,k+1} \cdots \psi_{n\,n-1} \end{vmatrix}}{\sqrt{(\psi_1 - \varphi_1)^2 + (\psi_2 - \varphi_2)^2 + \ldots + (\psi_n - \varphi_n)^2}^{\,n}} \cdot d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1},
$$

in welcher die den φ bez. ψ angefügten zweiten Indices die nach dem entsprechenden Parameter λ genommenen Dif-

ferentialquotienten bezeichnen. Die Integration erstreckt sich dabei über die sämmtlichen absolut zu nehmenden Elemente der beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1}, für welche die Formeln gelten:

$$49') \quad do'_k = \sqrt{\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{nk} \end{Vmatrix}^2} \cdot d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_k,$$

beziehungsweise

$$49'') \quad do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{Vmatrix} \psi_{1k+1} & \psi_{2k+1} & \cdots & \psi_{nk+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{1n-1} & \psi_{2n-1} & \cdots & \psi_{nn-1} \end{Vmatrix}^2} \cdot d\lambda_{k+1} \, d\lambda_{k+2} \ldots d\lambda_{n-1};$$

wir verfügen dabei über die Richtung der Elemente für die Integration so, dass wir im Sinne der wachsenden λ integriren; die $d\lambda$ sind also stets positiv. Die Integration ist an Grenzbedingungen nicht geknüpft.

Formel (48) kennzeichnet somit, nach den im I. Theil der Beiträge gegebenen Entwicklungen (Formel (12) auf pag. 266) die Zahl V als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der n Functionen:

$$50) \quad \psi_1 - \varphi_1, \quad \psi_2 - \varphi_2, \quad \ldots \quad \psi_n - \varphi_n$$

der $n-1$ Variabeln $\lambda_1, \ldots \lambda_k, \lambda_{k+1} \ldots \lambda_{n-1}$. V ist daher auch stets eine ganze Zahl, die wir eben als Windungszahl bezeichnen.

Führen wir nun in Analogie mit unseren früheren Formeln (8) die durch die Gleichungen

$$
51)\quad
\begin{aligned}
z_1 &= \psi_1(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_1(\lambda_1, \ldots \lambda_k),\\
z_2 &= \psi_2(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_2(\lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
z_n &= \psi_n(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_n(\lambda_1, \ldots \lambda_k)
\end{aligned}
$$

definirte $n-1$ dimensionale Mannigfaltigkeit ein,[1]) so folgt auch hier der Satz:

Die Zahl der gegenseitigen Umwindungen der in (47) dargestellten Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} ist gleich der Zahl der Windungen der Mannigfaltigkeit (51) um den Nullpunkt.

Die Zahl V lässt sich nunmehr als Charakteristik des Functionensystems (50) im Anschluss an die in den „Beiträgen I" entwickelten Formeln weiter darstellen durch ein $n-2$-faches, $n-3$-faches, ... einfaches Integral und durch eine Summenformel, und es ergeben sich hieraus neue Methoden für die Herleitung der Windungszahl in Analogie mit den in § 2 für zwei Raumcurven gegebenen. Es ist nicht uninteressant, deren Bedeutung im Einzelnen näher zu verfolgen[2]); wir greifen aber im Gegenwärtigen von dieser

---

1) Die Mannigfaltigkeit M_{n-1} (51) kann dabei analog wie die Fläche (8) in übersichtlicher Weise entstanden gedacht werden dadurch, dass man durch den Nullpunkt des Coordinatensystems Strahlen parallel zu den $(n-1)$-fach unendlich vielen zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten zu ziehenden Sehnen zieht und auf diesen je die Längen dieser Sehnen, gemessen in der Richtung von der ersten zur zweiten Mannigfaltigkeit, abschneidet. Andererseits kann, analog wie dort, M_{n-1} auch entstanden gedacht werden als „Translationsmannigfaltigkeit", die sich auf eine zur $M''_{n-k-1}: z''_i = \psi_i(\lambda_{k+1} \ldots \lambda_{n-1})$ congruente und auf eine zweite aus der M'_k durch „Spiegelung am Nullpunkt" entstandene Mannigfaltigkeit $z_i = -\varphi_i(\lambda_1 \ldots \lambda_k)$ als Leitgebilde bezieht.

2) Man vergleiche für eine weitere Deutung der hierher gehörigen Formeln auch die Schlussbemerkungen des § 9.

ganzen Reihe der Darstellungen von V nur das letzte Glied, die Summenformel, heraus, auf welche wir in der Folge noch einzugehen haben.

Die Summenformel, in ihrer doppelten Gestalt, lautet:

52a)

$$V=(-1)^{n-1}\sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}\right\}$$

oder

52b)

$$V=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\sum \text{sign.}\left\{(\psi_n-\varphi_n)\cdot\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}\right\}$$

die erste Summe ausgedehnt über alle Punkte, für welche

$$\psi_1-\varphi_1=0,\quad \psi_2-\varphi_2=0,\ \ldots\ \psi_{n-1}-\varphi_{n-1}=0,\quad \psi_n-\varphi_n>0$$

ist, die zweite ausgedehnt über alle Punkte

$$\psi_1-\varphi_1=0,\qquad \psi_2-\varphi_2=0,\ \ldots\ \psi_{n-1}-\varphi_{n-1}=0.$$

Wir können diese Punkte in geometrischer Sprechweise bezeichnen als die scheinbaren Doppelpunkte, welche die Ansicht der beiden im linearen Raume L_n der $z_1 \ldots z_n$ gelegenen Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} gesehen in der Richtung der Axe z_n darbietet. Das Vorzeichen des Fac-

tors $(\psi_n - \varphi_n)$ an jeder dieser Stellen besagt uns, welche der beiden Mannigfaltigkeiten dort dem Beschauer, den wir wieder im Punkte $z_n = +\infty$, $z_1 = z_2 \ldots z_{n-1} = 0$ aufgestellt denken, näher liegt. Das Vorzeichen des zweiten Factors trennt die scheinbaren Doppelpunkte nach dem Sinne der $n-1$ Fortschreitungsrichtungen auf M'_k bez. M''_{n-k-1}. Dabei gilt für die Gesammtheit aller scheinbaren Doppelpunkte die Kronecker'sche Formel:

$$
53)\quad \sum \mathrm{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ -\varphi_{n-1\,1} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}\right\} = 0,
$$

die Summe ausgedehnt über alle scheinbaren Doppelpunkte

$$
\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0 \ \ldots \ \psi_{n-1} - \varphi_{n-1} = 0,
$$

eine Formel, welche die Ueberführung der Formeln (52a) und (52b) in einander vermittelt.

§ 8.

Formeln für die Windungszahl der Mannigfaltigkeiten unter Voraussetzung ihrer Darstellung durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten. Beweis der Uebereinstimmung der in § 7 und 8 gewonnenen Zahlen.

Gehen wir nunmehr von der Darstellung der beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} durch Gleichungssysteme in den Coordinaten z_i aus. Es sei die M''_{n-k-1} gegeben durch die $(k+1)$ Gleichungen:

$$
54'')\quad
\begin{aligned}
&F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,\\
&F_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,\\
&\quad\cdots\cdot\\
&\quad\cdots\cdot\\
&F_k(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,
\end{aligned}
$$

und analog die M'_k durch die $(n-k)$ Gleichungen

$$
54')\quad
\begin{aligned}
&F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,\\
&F_{k+2}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,\\
&\quad\cdots\cdot\\
&\quad\cdots\cdot\\
&F_n\quad(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Es lässt sich dann auch hier, wie im Falle zweier Raumcurven das in Formel (45) gegebene Integral für die Windungszahl nicht allgemein aufstellen. Man erhält aber analog wie dort den Satz:

Die gegenseitige Windungszahl der beiden durch die Gleichungen (54'') und (54') definirten Mannigfaltigkeiten ist gleich der Kronecker'schen Charakteristik K der in dem Gleichungssystem enthaltenen $(n+1)$ Functionen

$$
55)\qquad F_0, F_1, F_2, \ldots F_n
$$

der n Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich genau den Darlegungen des § 4 entsprechend, wenn wir anknüpfen an die Darstellung der Zahl K durch die Summenformel:

$$
56)\quad K = (-1)^n \cdot \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{02} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ F_{n-11} & F_{n-12} & \ldots & F_{n-1n} \end{vmatrix} \right\},
$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots \quad F_{n-1} = 0, \quad F_n > 0$$

ist, und diese mit der in Formel (52a) gegebenen Darstellung der Zahl V vergleichen.

Verschieben wir, etwa in Richtung der Axe z_n, die Mannigfaltigkeit M''_{n-k-1}, so ändern sich die Zahlen V und K sprungweise an den Stellen, in welchen die bewegte M''_{n-k-1} die feste M'_k durchsetzt. Wir beginnen nunmehr die Abzählung dieser Aenderungen von einer Lage der M''_{n-k-1} an, in welcher diese völlig getrennt von der M'_k erscheint. Es lässt sich eine solche Lage, wenn wir voraussetzen, dass beide Mannigfaltigkeiten ganz im Endlichen liegen, stets durch eine endliche Verschiebung der M''_{n-k-1} (die wir hier in Richtung der negativen Axe z_n vornehmen) erreichen. In dieser Anfangslage ist V sowohl wie K gleich Null. Die Aenderungen der Zahl V zwischen der Anfangs- und Endlage führen unmittelbar zu den Formeln (52) für V.

Aus den Aenderungen der Zahl K aber ergiebt sich (ganz entsprechend den Entwicklungen auf pag. 472–475) die folgende neue Formel:

57)
$$K = (-1)^{n+1} \cdot \sum \mathrm{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-1} & 0 & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-1} & 0 & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{k\,n-1} & 0 & F_{kn} \\ F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{n\,n-1} & F_{nn} & 0 \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0(z_1, z_2, \dots z_n + C) = 0, \; F_1(z_1, z_2, \dots z_n + C) = 0, \dots, \; F_k(z_1, z_2, \dots z_n + C) = 0,$$
$$F_{k+1}(z_1, z_2, \dots z_n) = 0 \; \dots \; F_n(z_1, z_2, \dots z_n) = 0$$

und $C > 0$ ist, eine Formel, welche K als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der Functionen

$$58) \quad \begin{array}{ll} F_0(z_1, z_2, \dots z_n + C), \dots & F_k(z_1, z_2, \dots z_n + C), \\ F_{k+1}(z_1, z_2, \dots z_n), \dots & F_n(z_1, z_2, \dots z_n), \quad C \end{array}$$

mit den Variabeln $z_1, z_2, \dots z_n$, C darstellt.

Nunmehr aber lassen sich die Formeln (52) und (57) für die Zahlen V und K direct mit einander vergleichen; sie beziehen sich beide auf die „scheinbaren Doppelpunkte", welche die Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} gesehen in Richtung der Axe z_n darbieten und unterscheiden dieselben in derselben Weise nach dem Vorzeichen der Inhaltsdeterminante:

$$59) \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} -\overset{(1)}{dz'_1} & -\overset{(2)}{dz'_1} & \dots & -\overset{(k)}{dz'_1} & \overset{(k+1)}{dz''_1} & \dots & \overset{(n-1)}{dz''_1} \\ -\overset{(1)}{dz'_2} & -\overset{(2)}{dz'_2} & \dots & -\overset{(k)}{dz'_2} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \dots & \overset{(n-1)}{dz''_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -\overset{(1)}{dz'_{n-1}} & -\overset{(2)}{dz'_{n-1}} & \dots & -\overset{(k)}{dz'_{n-1}} & \overset{(k+1)}{dz''_{n-1}} & \dots & \overset{(n-1)}{dz''_{n-1}} \end{vmatrix},$$

der linearen $n-1$-dimensionalen Configuration, welche sich aus der Projection der k bez. $n-k-1$ Linienelemente der M'_k bez. M''_{n-k-1} in die Coordinatenmannigfaltigkeit $z_1, z_2, \dots z_{n-1}$ (durch Orthogonalprojection in Richtung der Axe z_n) ergiebt.

Für die obige Inhaltsdeterminante erhält man nämlich zunächst in den φ, ψ geschrieben die Formel:

$$
60)\quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_k d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1}.
$$

Für die Umsetzung in eine in den Functionen F geschriebene Formel beachte man, dass die Matrix

$$
61')\quad \begin{Vmatrix} -\overset{(1)}{dz'_1} & -\overset{(1)}{dz'_2} & \ldots & -\overset{(1)}{dz'_{n-1}} & -\overset{(1)}{dz'_n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ -\overset{(k)}{dz'_1} & -\overset{(k)}{dz'_2} & \ldots & -\overset{(k)}{dz'_{n-1}} & -\overset{(k)}{dz'_n} \end{Vmatrix}
$$

correspondirende Matrix ist zu

$$
62')\quad \begin{Vmatrix} F_{k+1\,1}, & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ F_{n\,1} & F_{n\,2} & \ldots & F_{n\,n-1} & F_{n\,n} \end{Vmatrix}
$$

und ebenso die Matrix

$$
61'')\quad \left\| \begin{matrix} \overset{(k+1)}{dz''_1} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \cdots & \overset{(k+1)}{dz''_{n-1}} & \overset{(k+1)}{dz''_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-1)}{dz''_1} & \overset{(n-1)}{dz''_2} & \cdots & \overset{(n-1)}{dz''_{n-1}} & \overset{(n-1)}{dz''_n} \end{matrix} \right\|
$$

correspondirende Matrix zu

$$
62'')\quad \left\| \begin{matrix} F_{01} & F_{02} & \cdots & F_{0\,n-1} & F_{0\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \cdots & F_{k\,n-1} & F_{k\,n} \end{matrix} \right\|.
$$

Führt man dann in der Mannigfaltigkeit M'_k etwa die Coordinaten $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots z_{i_k}$, in der Mannigfaltigkeit M''_{n-k-1} die Coordinaten $z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots z_{j_{n-k-1}}$ als unabhängige Variable ein, wählt die k, bez. $n - k - 1$ Fortschreitungsrichtungen auf diesen Mannigfaltigkeiten so, dass jeweils nur eine der obigen unabhängigen Coordinaten sich ändert, während dann die abhängigen Coordinaten den Gleichungen

$$
F_{\sigma i} + \sum_{\mu = i_{k+1}}^{\mu = i_n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z'_\mu}{\partial z'_i} = 0,
$$

$$
\sigma = k + 1, \ldots n, \qquad i = i_1, i_2, \ldots i_k,
$$

beziehungsweise

$$
F_{\tau j} + \sum_{\nu = j_{n-k}}^{\nu = j_n} F_{\tau\nu} \frac{\partial z''_\nu}{\partial z''_j} = 0,
$$

$$
\tau = 0, 1, \ldots k, \qquad j = j_1, j_2, \ldots j_{n-k-1},
$$

entsprechend sich ändern, bezeichnet endlich D_i bez. D_j die Determinante der F, welche durch Streichung der Vertical-

reihen $i_1, i_2 \dots i_k$ in der Matrix (62′), beziehungsweise der Reihen $j_1, j_2 \dots j_{n-k-1}$ in der Matrix (62″) entsteht, so folgt für die $n-1$ gliedrige Determinante (59) der dz in den F geschrieben die Formel:

63)
$$\Delta_{n-1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0\,n-1} & 0 & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1\,n-1} & 0 & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{k\,n-1} & 0 & F_{kn} \\ F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{n\,n-1} & F_{nn} & 0 \end{vmatrix} \cdot$$
$$\cdot \frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \dots dz'_{i_k}}{D_i} \cdot \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \dots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j}.$$

Nun hat man aber für die positiv zu nehmenden Elemente der beiden Mannigfaltigkeiten die Formeln:

64′)
$$do'_k = \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \dots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \dots & \varphi_{nk} \end{vmatrix}^2} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_k =$$
$$= \sqrt{\begin{vmatrix} F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}^2} \cdot \frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \dots dz'_{i_k}}{D_i},$$

und

64″)

$$do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{vmatrix} \psi_{1\,k+1} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{n\,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{1\,n-1} & \psi_{2\,n-1} & \cdots & \psi_{n\,n-1} \end{vmatrix}^2} \cdot d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \cdots & F_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \cdots & F_{kn} \end{vmatrix}^2} \cdot \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j}.$$

Der Vergleich dieser Ausdrücke ergiebt, dass einer Summation, in welcher die Elemente $d\lambda_1 \ldots d\lambda_k$ bezw. $d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1}$ stets positiv genommen sind, eine Summation entspricht, für welche die Ausdrücke

$$\frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \ldots dz'_{i_k}}{D_i} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j}$$

stets positiv gerechnet werden.[1]) Hieraus aber folgt durch Vergleich der Formeln (63) und (60), dass für alle Elemente der Summation das Vorzeichen der Determinante (59) in den dz übereinstimmt mit dem der Determinante (60) in den φ, ψ und mit dem der Determinante (63) in den F.

Daraus aber folgt die Identität der durch die Formeln (52) und (57) gewonnenen Zahlen V und K und damit der zu Eingang des Paragraphen aufgestellte Satz.

---

1) Das aus diesen Formeln für die Mannigfaltigkeiten abzuleitende „Fortgangsprincip“ erweist sich als Verallgemeinerung des von Kronecker in der Abh. vom März 1869 (vergl. auch diese Abh. S. 473, Anm.) gegebenen, worauf ich in einer folgenden Note noch näher einzugehen gedenke.

§ 9.

Folgerungen. Schlussbemerkungen.

Der hiermit gewonnene Satz über die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik der Functionen

$$F_0, \quad F_1, \quad \ldots \quad F_n$$

als Windungszahl zweier Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1}, die durch Nullsetzen von $n-k$ bez. von $k+1$ der obigen Functionen gewonnen werden, lässt nun die Bedeutung der Zahl K für dieses Functionensystem in ganz allgemeiner Weise übersehen:

Wie wir auch das System der $n+1$ Functionen von n Variabeln z in zwei Theile zerlegen, stets definiren die gleich Null gesetzten Functionen der beiden Theile zwei sich ergänzende Mannigfaltigkeiten von k bez. von $n-k-1$ Dimensionen, deren Windungszahl stets dieselbe, und gleich der Kronecker'schen Charakteristik K des Functionensystems ist. Für $k=0$ erhalten wir ein System von Punkten in Verbindung mit einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen[1]), für $k=1$ eine lineare Mannigfaltigkeit und eine $n-2$-dimensionale u. s. w.

Im zweidimensionalen Raume handelt es sich um die Windung von Linien um Punkte, im dreidimensionalen Raume um die Windung von Flächen um Punkte, von Linien um Linien, im vierdimensionalen Raume um die Windung von dreidimensionalen Räumen um Punkte, von Flächen um Linien, im fünfdimensionalen Raume um die Windung von vierdimensionalen Räumen um Punkte, von dreidimensionalen Räumen um Linien, von Flächen um Flächen u. s. w.

---

1) Es erscheint in diesem Zusammenhange sinngemäss, auch von einer Windungszahl einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit um ein Punktsystem zu sprechen.



Dabei liefern die verschiedenen Möglichkeiten, die $n+1$ Functionen des Systems zu je 1 und n, zu 2 und $n-1$ u. s. w. abzutheilen im Ganzen $n+1$ verschiedene Punktsysteme, $\frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2}$ Linien, allgemein $\binom{n+1}{k+1}$ k-dimensionale Mannigfaltigkeiten in Verbindung mit ihren complementären Mannigfaltigkeiten von $n-k-1$ Dimensionen, denen sämmtlich ein und dieselbe Windungszahl zukommt.

Diesen verschiedenen Möglichkeiten, die Zahl K als Windungszahl zweier durch Zerlegung des Functionensystems

$$F_0, F_1, \ldots F_k \parallel F_{k+1}, \ldots F_n$$

hergestellten Mannigfaltigkeiten aufzufassen, entsprechen nun paarweise die verschiedenen Arten der Darstellung von K durch bestimmte Integrale 0ter (Summenformel) bis $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, von denen wir im ersten Theile dieser Beiträge gehandelt haben.

Speciell bezieht sich die dort in (14) gegebene Kronecker'sche Summenformel, und ebenso andererseits das von Kronecker abgeleitete $(n-1)$-fache über $F_0 = 0$ ausgedehnte Integral auf die Deutung der Charakteristik als Windungszahl der $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ um das Punktsystem $F_1 = 0, \ldots F_n = 0$. Allgemein giebt das in Formel (26) der Beiträge I gegebene $(n-k-1)$-fache Integral und ein correspondirendes k-faches die Auffassung der Zahl K als Windungszahl der Mannigfaltigkeiten

$$M''_{n-k-1}: \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots F_k = 0$$

und

$$M'_k \quad : \quad F_{k+1} = 0, \quad F_{k+2} = 0, \ldots \quad F_n = 0.$$

Es verdient dabei in diesem Zusammenhange nochmals der dort schon erwähnte Umstand hervorgehoben zu werden,

dass das zur Berechnung der Windungszahl dienende $(n-k-1)$-fache Integral sich über die M''_{n-k-1} als Grenze erstreckt, während der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck lediglich von den zur Definition der M'_k dienenden Functionen abhängt. Mit Hülfe der in den dortigen Entwicklungen zu Grunde gelegten Deutung der Functionen F als Coordinaten eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes $x_0, x_1, \ldots x_n$ erhält dabei der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck die gerade für die Auffassung des Integrals als Windungszahl wesentliche Bedeutung als Differential eines $(n-k-1)$-dimensionalen „räumlichen Winkels“.

Das n-fache, in Formel (12) der „Beiträge I“ gegebene Integral für K hat für die hier erörterte Theilung des Functionensystems der F keine unmittelbare Bedeutung. Ein Integral dieser letzteren Art hat dagegen in den auf die Parameterdarstellung der beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} bezüglichen Formeln (§ 7) den Uebergang der an die Kronecker'sche Charakteristik anknüpfenden Integrale zu der Gauss'schen Darstellung der Windungszahl vermittelt.

Umgekehrt kann man nun auch die Deutung der Zahl K als Windungszahl zweier zusammengeordneter Mannigfaltigkeiten wieder anwenden auf das aus der Parameterdarstellung (Formel 47′ und 47″) gewonnene Functionensystem

$$50) \qquad \psi_1 - \varphi_1, \quad \psi_2 - \varphi_2, \quad \ldots \quad \psi_n - \varphi_n .$$

Betrachtet man nämlich die $n-1$ Parameter λ_i als Coordinaten eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes, so ergeben sich auch hier durch Nullsetzen je zweier sich ergänzender Gruppen von Functionen $\psi_i - \varphi_i$ einander zugeordnete Paare von Mannigfaltigkeiten, deren gegenseitige Windungszahl eben wieder unsere Zahl K ist. Ich gehe indess hier nicht näher auf diese Entstehungsweise der Zahl K ein.

Berichtigungen

zum I. Theile der Beiträge zur Potentialtheorie.

Auf Seite 264 Formel (5) sind im Nenner die Matrixstriche zu ergänzen.
„ „ 271 Zeile 9 von oben ist zu lesen Gleichung (18) statt (16).
„ „ 275 „ 7 „ „ „ „ „ „ (21) „ (19).
„ „ 275 „ 9 „ „ „ „ „ „ (25) „ (23).
„ „ 275 „ 8 „ unten „ „ „ „ (14) „ (19).

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1895.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Société d'Émulation in Abbeville:

Mémoires. Tome 18. 19. 1893/94. 8⁰.
Bulletin. Année 1892 No. 2—4, 1893 No. 1—4, 1894 No. 1. 2. 8⁰.
Cinquentenaire de M. Ernest Prarond. 1894. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 19, part 1. 1895. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis za godinu. 1894. 1895. 8⁰.
Rad. Vol. 117—122. 1894/95. 8⁰.
Monumenta spectantia historiam Slavorum merid. Vol. XXVI. 1894. 8⁰.
Monumenta historico-juridica Slav. merid. Vol. V. 1894. 8⁰.
Djela. Vol. XIV, 1. 1895. 4⁰.
Tade Smičiklas, Život i djela Dra Franje Račkoga. 1895. 8⁰.
Milan Rešetar, Zadarski i Rańinin Lekcionar. 1894. 8⁰.

New-York State Library in Albany:

New-York State Museum. 47th annual Report for 1893. 1894. 8⁰.
New-York State Library. 76th annual Report for 1892/93. 1894. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

State Library Bulletin. a) Bibliography No. 1. b) Additions No. 2. 1894/95. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1893 No. 1—4. 1894 No. 1. 1893/94. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I Sectie. Deel II, 7. Deel III, 1—4. II Sectie. Deel IV, 1—6. 1894/95. 4⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel I, No. 4. 1895. 4⁰.

Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jaar 1894/95. 1895. 4⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde 3e Reeks, Deel 11. 1895. 8⁰.
Jaarboek voor 1894. 8⁰.
Myrmedon aliaque poemata. 1895. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

28th annual Report. June 1, 1895. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIV, No. 119, 120, 121. 1895. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XVI, 4. XVII, 1—3. 1894/95. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XV, 2—4. XVI, 1. 1894/95. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 16, No. 7 u. 8. Vol. 17, No. 1—7. 1894/95. 8⁰.
Johns Hopkins University Studies. Ser. XII. No. 8—12, Ser. XIII, No. 1—8. 1894/95. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band XI, 1. 1895. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Chronik. Leipzig 1895. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ und 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 38, afl. 4. 5. 1895. 8⁰.
Notulen. Deel 32, afl. 4; Deel 33, afl. 1. 2. 1895. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 48, stuk 2; Deel 50, 1. 1894/95. 8⁰.
Nederlandsch-Indisch-Plakaatboek. Deel XIII. 1895. 8⁰.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 54. 1895. 8.
Boekwerken ter tafel gebracht in de vergaderingen 1893. 1894. 1894/95. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte u. Alterthumskunde in Ostfranken. Band XIX, 2. 1894. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. 48. 1895. 8⁰.
Spomenik. No. 26. 27. 29. 1895. 4⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Abhandlungen aus dem Jahre 1894. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1895, No. 26—38. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 16, 17 u. 19 mit zugehörigen Atlanten. 1895. 4⁰ u. fol.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 28. Jahrg., No. 12—18. 1895. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 46, Heft 4; 47, Heft 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1893. 49. Jahrg., Abth. I—III. Do. i. J. 1889; 45. Jahrg. 3 Voll. Braunschweig 1895. 8⁰.

Verhandlungen. 12. Jahrg. No. 1, 13. Jahrg. No. 1—4, 14. Jahrg. No. 1 u. 2. Leipzig 1894. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. 1895. No. 8—14. 16—19. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahresbericht über d. Jahr 1894/95. 1895. 4⁰.

Jahrbuch. Band X, Heft 2 u. 3. 1895. 4⁰.

Geodätisches Institut in Berlin:

Zenithdistanzen zur Bestimmung der Höhenlage der Nordsee-Inseln Helgoland etc. 1895. 4⁰.

A. Westphal, Untersuchungen über den selbstregistrirenden Universalpegel zu Swinemünde. 1895. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Bericht über d. Jahr 1894. 1895. 8⁰.

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1894. 1895. 4⁰.

Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen im Jahre 1891. 1895. 4⁰.

Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im J. 1893. 1895. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXIV, Heft 2. 3. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band VIII, 1. Leipzig 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band X, Heft 6—11. 1895. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 15. Jahrg. 1895. No. 7—12. Juli—Dezember. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus d. Jahre 1894. 1895. 8⁰.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Band 34. 1895. 4⁰.

Verhandlungen. 77. Jahresversammlung. Schaffhausen 1894. 8⁰. Nebst einer französischen Uebersetzung. Genève 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Band XIV, 3. 1895. 8⁰.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VI. Série, Vol. 7. 8. 1893/94. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti. Serie III. Vol. XIII, fasc. 1—3. 1895. 4⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 96—98. 1895. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 51. Jahrg. 2. Hälfte. 1894. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Mémoires. IVᵉ Série, tome III, 2. IV, 1. 2. Paris et Bordeaux 1893/94. 8⁰.

Observations pluviométriques 1892/93. 1893. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 45. 46. 1893. 8⁰.

Catalogue de la bibliothèque, fasc. 1. 1894. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1895. No. 13—20. 8⁰.

Archiv der Stadt Braunschweig:

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. II, Abth. 1. 1895. 4⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:

72. Jahresbericht nebst Ergänzungsheft. 1895. 8⁰.

Historisch-statistische Sektion der k. k. Mährischen Landwirthschafts-Gesellschaft in Brünn:

Urkunden zur Geschichte der Stadt Brünn. 1895. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires des membres in 4⁰. Tome 50, part 2. T. 51. 52. 1893/94. 4⁰.

Mémoires couronnés in 4⁰. Tome 53. 1893/94. 4⁰.

Mémoires couronnés in 8⁰. Tome 47. 50. 51. 52. 1892/95. 8⁰.

Correspondance du Cardinal de Granvelle. Tome X et XI. 1893/94. 4⁰.

Biographie nationale. Tome XII, 2. XIII, 1. 1892—94. 8⁰.

Bulletin. 3. Série. Tome 29, No. 6; Tome 30, No. 7—10. 1895. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés et autres mémoires. Tome XIV, No. 1—3. 1895. 8⁰.

Bulletin. IV. Série. Tome IX, No. 7—10. 1895. 8⁰.

Institut international de bibliographie in Brüssel:

Bulletin. Vol. 1, No. 1. 1895. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XIV, 3 u. 4. 1895. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 38. 1894. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 27. Année 1892. 8⁰.

Procès-verbaux. 1892—95. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Ungarische Revue. 1895. Heft 5—7. 8°.
Almanach. 1895. 8°.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftl. Mittheilungen.) Bd. XXIV, 3. 4; XXV, 1. 2. 1893/94. 8°.
Zs. Simonyi, A Magyar határozók. (Die Bestimmungswörter im Ungarischen.) Bd. II, 2. 1895. 8°.
Gy. Zolnay, Nyelvemlékeink. (Unsere Sprachdenkmäler.) 1894. 4°.
Történettud. Ertekezések. (Historische Abhandlungen.) XVI, 2—5. 1893—95. 8°.
Téglás Gabor, Ujab adalékok. (Neuere Beiträge zu den Felseninschriften.) 1894. 4°.
Monumenta comitialia regni Transylvaniae. Vol. XVI. XVII. 1893—94. 8°.
Óváry, L. A. M. T. Akad. történelmi bizottságának oklevélmásolatai. (Urkunden-Abschriften d. histor Commission.) Bd. 2. 1894. 8°.
Király J., Pozsony város joga a Középkorban. (Pressburger Stadtrecht.) 1894. 8°.
Archaeologiai Ertesitö. (Archäolog. Anzeiger.) XIII, 3—5; XIV, 1—5; XV, 1—3. 1893. 4°.
Archaeologiai Közlemények. (Archäol. Mittheil.) Bd. XVII. 1895. fol.
Tarsadalmi Ertekezések. (Staatswissensch. Abhandlungen.) XI, 7—10. 1894—95. 8°.
Nyelvtudomán. Ertekezések. (Sprachwissenschaftl. Abhandlungen.) XVI, 4. 5. 1894. 8°.
Munkácsi B., A Votják nyelv szótára. (Votjákisches Wörterbuch.) fasc. 3. 1893. 8°.
Magyarországi tanulók külföldön. (Ungarische Studirende im Auslandd.) Vol. III. 1893. 8°.
Acsády J., Két penzügytörténelmi tanulmány. (Zwei finanzgeschichtliche Studien.) 1894. 8°.
Fraknói V., Mátyás Király levelei. (Sektion für äussere Angelegenheiten.) Vol. I. 1893 8°.
Thaly K., Bercsényi házassága. (Die Ehe Bercsenyi's.) 1894. 8°.
Monumenta Hungariae historica. Class. II. Vol. 33. 1894. 8°.
Hampel J., A régibb Középkor emlékei. (Denkmäler des früheren Mittelalters.) Vol. I. 1894. 8°.
Természélludományi Ertekezések. (Naturwissenschaftl. Abhandlungen.) XXIII, 3—12. 1894. 8°.
Mathematikai Ertekezések. (Mathem. Abhandlgn.) XV, 4. 5. 1894. 8°.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) XI, 6—9. XII, 1—12. XIII, 1. 2. 1893—95. 8°.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mittheilungen.) XXV, 4. 5. XXVI, 1. 2. 1893—94. 8°.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. XI, 1. 2. XII, 1. 2. 1893—95. 8°.
Rapport. 1893. 1894. 1894—95. 8°.
Chyzer C. & L. Kulczyński, Araneae Hungariae. Tom I. II, 1. 1892—94. 4°.
Meyer Gotth. Alfréd, Der silberne Sarg des heil. Simeon in Zara (in ungar. Sprache.) 1894. fol.
Szamota István, A Schlägli Magyar Szójegyzék. 1894. 8°.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. Vol. XXV, 2. 1895. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Évkönyve (Jahrbuch.) Bd. XI, 3—6. XII, 1. 1895. 8⁰ und Atlas zu XI, 4 in fol.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. IX, 7. 1895. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. XXV, 1—5. 1895. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin. No. XIV. Batavia 1895. 4⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. IX, anul 1893. 1895. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. IV. Série. Vol. 8, fasc. 1-4. Vol. 9. fasc. 1. 1894/95. 8⁰.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 850—59. 1894—95. 8⁰.
Journal. No. 344—46. 1895. 8⁰.
Proceedings. No. 4—8, April—August 1895. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 28, part 3 u. 4. 1895. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1895 January—July and Annual Summary 1894. 1895. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. V, part 7—10. Calcutta 1895. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. VII, part 1-4. Simla 1895. fol.
Report on the Administration in 1894/95. 1895. fol.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VIII, part 5. 1895. 8⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 27, No. 1—6. 1895. 8⁰.
Memoirs. Vol. XVIII, XIX, 1. 1895. 4⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. II. Berlin 1895. 4⁰.
Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt 1894/95. Berlin 1895. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch 1894. Jahrg. XII, 1. Hälfte. 1895. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Remarques sur la nomenclature hépaticologique par Aug. Le Jolis. Paris 1894. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 5, No. 4. Vol. 6, No. 1. 1895. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. No. 409—430. 1895. 4⁰.

Norweg. Gradmessungs-Commission in Christiania:

Astronomische Beobachtungen. 1895. 4⁰.

O. E. Schiötz, Resultate der 1894 ausgeführten Pendelbeobachtungen. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 38. 1895. 8⁰.

P. Lorenz, Die Ergebnisse der sanitarischen Untersuchungen der Rekruten des Kantons Graubünden. Bern 1895. 4⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1895. No. 48—101. fol.

Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1895/96. 1895. 8⁰.

Uebersicht der akademischen Behörden 1895/96. 1895. 8⁰.

Die feierliche Inauguration des Rektors am 4. Okt. 1894. 1895. 8⁰.

Provinzial-Commission zur Verwaltung der westpreussischen Provinzial-Museen in Danzig:

Abhandlungen zur Landeskunde der Provinz Westpreussen. Heft IX. 1894. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

5 Abhandlungen aus den Proceedings von 1895. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band VII, 3. 1895. 8⁰.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IV. Série. Tome 4. Années 1893—94. 1894. 8⁰.

Gelehrte estnische Gesellschaft in Dorpat:

Sitzungsberichte 1894. 1895. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Vol. 18, trimestre 1—3. 1895. 8⁰.

K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1894/95. 1895. 8⁰.

Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. XVI. 1895. 8⁰.

Generaldirektion der kgl. Sammlungen in Dresden:

Bericht über die Verwaltung der kgl. Sammlungen in Dresden 1892/93. 1895. fol.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal of the American Chemical Society. Vol. 17, No. 10. 1895. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1894—95. p. 177—276. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XX, p. 385—480. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte in Eisleben:

Mansfelder Blätter. IX. Jahrg. 1895. 8⁰.

Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländ. Alterthümer in Emden:
Jahrbuch. Bd. XI, 1. 2. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:
79. Jahresbericht für 1893/94. 1895. 8⁰.

K. Universität Erlangen:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Ser. Vol. 18, disp. 2. 1895. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Band XIX, No. 1. 2. 1895. 4⁰.
Bericht. 1895. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:
Jahresbericht für 1893/94. 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:
Helios. 13. Jahrg. 1895. No. 1—6. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i/Br.:
Berichte. Bd. IX, 1—3. 1894—95. 8⁰.

Kirchlich-historischer Verein in Freiburg i/Br.:
Freiburger Diöcesan-Archiv. Bd. 24. 1895. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:
Collectanea Friburgensia. Fasc. IV. 1895. 4⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. Wint.-Sem. 1895/96. 1895. 8⁰.

Institut national in Genf:
Bulletin. Tome 33. 1895. 8⁰.

Observatoire in Genf:
Resumé météorologique de l'année 1894. 1895. 8⁰.
Sur quelques particularités de l'hiver 1894/95. par A. Kammermann. 1895. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:
Mémoires. Tome XXXII, 1. 1894—95. 4⁰.

Universität Genf:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Ser. II. Vol. 14. 15. 1894—95. 8⁰.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:
30. Bericht. 1895. 8⁰.

Universität in Giessen:
Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ und 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Band 71, Heft 1. 2. 1895. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Göttingische gelehrte Anzeigen. No. VII—XII, Juli—December 1895. 4⁰.
Nachrichten. Hist.-philol. Classe. Heft 3. 4. 1895. 4⁰.
" Mathem.-phys. Classe. Heft 2. 3. 1895. 4⁰.

Astronomische Mittheilungen der k. Sternwarte zu Göttingen. Th. IV. 1895. 4⁰.
Geschäftliche Mittheilungen. 1895. No. 2.

Sternwarte in Göttingen:

A. von Koenen u. W. Schur, Ueber die Auswahl der Punkte bei Göttingen, an welchen bei Probe-Pendelmessungen Differenzen zu erwarten waren. 1895. 4⁰.

Denison Scientific Association in Granville (Ohio).

Bulletin of the Scientific Laboratories of Denison University. Vol. VIII, part 1. 2. 1893/94. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville:

Journal. Vol. V, p. 71—138. 8⁰.

Landesmuseum Joanneum in Graz:

LXXXIII. Jahresbericht über das Jahr 1894. 1895. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. 43. Heft. 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1894. Heft 31. 1895. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:

Pommersche Genealogien. Bd. 5. 1896. 8⁰.

K. Niederländische Regierung im Haag:

J. A. C. Oudemans, Die Triangulation von Java. IV. Abth. 1895. 4⁰.
Nederlandsch kruidkundig Archief. I. Ser. 6. Deel. 4ᵉ Stuk. Nijmegen. 1895. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel I, aflev. 3. 4. 1895. 8⁰.
De Garĕbĕg's te Ngajogyåkartå door J. Groneman. 1895. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Tome 29, livr. 2. 3. 1895. 8⁰.
Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Vol. VI. La Haye 1895. 4⁰.

Teyler Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II. Vol. 4, partie 4. 1895. 4⁰.
Verhandlungen van Teylers tweede Genootschap. N. R. Deel. V, stuk 1. 1895. 8⁰.
Verhandlungen van Teylers godgeleerd Genootschap. N. S. Deel. XV. 1895. 8⁰.

Gymnasium zu Hall in Tyrol:

Programm 1894/95. 1895. 8⁰.

Kais. Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft XXXI, No. 11—22. 1895. 4⁰.

Thüringisch-sächsischer Geschichts- und Alterthumsverein in Halle:

Jahresbericht für 1894/95. 1895. 8⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 49, Heft 2. 3. Leipzig 1895. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ und 8.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift f. Naturwissenschaften. Bd. 68, Heft 1 u. 2. Leipzig 1895. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftl. Anstalten. XI. Jahrg. 1893 und Beiheft. 1894. 4⁰.

Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde in Hanau:

Bericht. 1892—95. 1895. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1895. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Leo Königsberger, Hermann v. Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. 1895. 4⁰.
Schriften der Universität aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. V, Heft 2. 1895. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Observations météorologiques. 1889—1890. Kuopio 1895. fol.
Observations (météorologiques). Vol. XII, livr. 1. 1894. fol.
Acta societatis scientiarum Fennicae. Tom. 20. 1895. 4⁰.
Öfversigt XXXVI. 1893/94. 1894. 8⁰.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 54—56, 1894/95. 8⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften der Universität Helsingfors aus d. Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Band XXVI, Heft 3. 1895. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1894/95. 1895. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen. 44. Jahrg. 1895. 8⁰.

Michigan Mining School in Houghton:

Prospectus of elective studies. May 1895. 8⁰.

Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. XXII. Jahrg. 1895. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Band 39. 1895. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 29, Heft 3 u. 4. Bd. 30, Heft 1. 1895. 8⁰.

Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde in Jena:
Zeitschrift. Bd. VIII, 3. 4; IX, 1. 1893/94. 8⁰.
Regesta diplomatica necnon epistolaria historiae Thuringiae. 1. Halbband. 1895. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):
Sitzungsberichte. Bd. X, 3. 1895. 8⁰.
Schriften. No. VIII. 1895. 4⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):
Schriften der Universität aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:
Jahresbericht des Centralbureaus für das Jahr 1894. 1895. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:
Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Grossh. badische Staats-Alterthümersammlung in Karlsruhe:
Veröffentlichungen der grossh. badischen Sammlungen. 1895. 4⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. IIᵉ Série. Tome IV, No. 3. 4; V, No. 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Universität Kasan:
Utschenia Sapiski. Tom. 62, No. 2. 7. 8. 9. 11. 1895. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte in Kassel:
Zeitschrift. N. F. Bd. XIX. 1894. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrgang 1892. 1893. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:
Abhandlungen und Bericht XL. 1895. 8⁰.

Universität Kharkow:
Sapiski. 1895. Heft 3. 8⁰.

K. Universität in Kiel:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Zeitschrift. Band 24. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:
Schriften. Band X, Heft 2. 1895. 8⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Vol. 35, No. 3—10. 1895. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:
Értesitö. 3 Hefte. 1895. 8⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Knin:
Glasilo. Band I, Heft 3. 1895. 4⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:
Schriften. 35. Jahrgang. 1894. 1895. 4⁰.

Universität in Königsberg:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Arabere og Kabyler Skildringer af Carit Etlar. 2 Bde. 1868—70. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1895. No. 2. 8⁰.
Skrifter. 1) historisk. Afd. IV, 2. 2) naturvid. Afd. VIII, 1. 1895. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke. Band 10, Heft 2 u. 3. 1895. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Sprawozdania komisyi fizyograficzney. Tom. 29. 1894. 8⁰.
Zbiór wiadomości do Antropol. Tom. XVIII. 1895. 8⁰.
Anzeiger. 1895. Juni, Juli, Oktober. November. 8⁰.
Rozprawy. a) histor.-filoz. Ser. II, Tom. 6. b) mathemat. Ser. II, Tom. 7. 1895. 8⁰.
Biblioteka pisarzy polskich. Tom. 30. 1895. 8⁰.
Finkel, Bibliografia histor. Tom. 2, Heft 1. 1895. 8⁰.
Archiwum literat. Tom. 8. 1895. 8⁰.
Pamiętnik (mathemat.) Tom. 18, Heft 3. 1895. 4⁰.

Historischer Verein für Niederbayern in Landshut:

Verhandlungen. 31. Band. 1895. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. III. Serie. Vol. XXXI, No. 117. 118. 1895. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. Deel XIV, No. 3, 4. 1895. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band XV, No. 3. 4. 1895. 4⁰.
Berichte. Philol.-hist. Classe. 1895. I. II. 8⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXII, No. 2—5.
Berichte. Math.-phys. Classe. 1895. Heft II—IV. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 51, Heft 12. Bd. 52, Heft 3—11. 1895. 8⁰.

Anatomische Gesellschaft in Leipzig:

Wilhelm His, Die anatomische Nomenclatur. 1895. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Katalog. I. Abth. 10. Stück. 1895. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 30. Jahrg. Heft 3. 1895. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. II. Reihe, 14. Theil, 1. u. 2. Heft. 1895. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. II. 1895. 8⁰.
Mittheilungen. 1894. 1895. 8⁰.

Faculté in Lille:

Travaux et Mémoires. Tome III, No. 10—14. 1893. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the Agricultural Experiment Station. No. 43. 1895. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

53. Jahresbericht, nebst 47. Lieferung der Beiträge zur Landeskunde. 1895. 8°.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XI, 1. 1895. 4°.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. X, No. 39. 40. 1895. 8°.

Royal Society in London:

Philosophical Transactions. Vol. 185, part II. A. B. 1895. 4°.
Proceedings. Vol. 58, No. 347—352. 1895. 8°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 55, No. 8. 9. Vol. 56, No. 1. 1895. 8°.

Chemical Society in London:

Journal. No. 392—397. July—December 1895. 8°.
Proceedings. No. 154—156. 1895. 8°.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. No. 201—204. 1895. 8°.
Geological Literature during the halfyear ended Dec. 1894. 1895. 8°.

Linnean Society in London:

Proceedings. Nov. 1893 to June 1894. 8°.
The Journal. Zoology. Vol. 25, No. 158—160. Botany. Vol. 30, No. 209. 210. 1894. 8°.
The Transactions. II. Ser. Zoology. Vol. VI, part 3. Botany. Vol. IV, part 2; V, part 1. 1894—95. 4°.
List 1894/95. 1894. 8°.

Medical and Chirurgical Society in London:

Transactions. Vol. 78. 1895. 8°.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1895. Part 4—6. 8°.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1895. Part II. 8°.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 52, No. 1334—57. 1895. 4°.

Academy of Science in St. Louis:

Transactions. Vol. VI, No. 18. Vol. VII, No. 1—3. 1895. 8°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome XX, 3; XXI, 3; XXII, 1. 2. 1892—95. 8°.

Section historique de l'institut Royal Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Vol. 42—44. 1895. 8°.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 50 u. 1 Fascikel Beilagen. Stans 1895. 8°.

Académie des sciences in Lyon:

Cartulaire Lyonnais, documents inédits recueillis et publiés par M.-C. Guigue. Tome II. 1893. 4°.
Mémoires. Sciences et lettres. III. Sér. Tome 2. Paris 1893. 4°.

Société d'agriculture, science et industrie in Lyon:

Annales. VII. Sér. Tome I. 1893. 1894. 4⁰.

Société d'anthropologie de Lyon:

Bulletin. Tome 12. 13. 1894—95. 8⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Tome 38—40. 1891—93. 8⁰.
Onothera ou Oenothera. Les ânes et le vin par le Dr Saint-Lager. Paris 1893. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 27, cuad. 1—6. 1895. 8⁰.

R. Academia de ciencias in Madrid:

Memorias. Tomo XVI. 1895. 4⁰.

Fondazione scientifica Cagnola in Mailand:

Atti. Vol. XII, XIII. 1894/95. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II. Vol. 26. 1893. Vol. 27. 1894. 8⁰.
Memorie. a) Classe di lettere. Vol. XIX, 2; XX, 1. b) Classe di scienze matematiche. Vol. XVII, 4; XVIII, 3. 1893/95. 4⁰.
Indice generale dei lavori dalla fondazione all' anno 1883. 1891. 8⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 35, fasc. 1. 2. 1895. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 22, fasc. 6. 7. 1895. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. IV. Serie. Vol. 9, No. 3—6. 1894/95. 8⁰.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tomo III, fasc. 1—3 et Supplément. Tomo IV, fasc. 1—3. 1893/94. 4⁰.
Annales de l'Institut botanico-géologique colonial. Vol. I. Paris 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Band IV, 1. 1895. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. Années 1892/93, 1893/94 et 1894/95. 1895. 8⁰.

Observatorio meteorologico central in México:

Boletin mensual. Mayo—Setiembre 1895. 4⁰.

Comision geológica Mexicana in México:

Boletin. No. I. 1895. 4⁰.
Expedicion científica al Popocatepetl por José G. Aguilera y Ezequiel Ordoñez. 1895. 8⁰.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie II. Vol. 10. 1894. 4⁰.

Amministrazione delle Pubblicazioni Cassinesi in Montecassino (Caserta):
Spicilegium Casinense. Tomus IV, 1. 1895. fol.

Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:
Comercio exterior y movimiento de navegacion en el año 1894. 1895. 4⁰.
Nuestro país por Orestes Araújo. 1895. 8⁰.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:
Mémoires. Section des lettres. 2ᵉ Série. Tome 1, No. 1—4.
Section des sciences. 2ᵉ Sér. Tome 1, No. 1—4. Tome 2, No. 1.
Section de médecine. 2ᵉ Série. Tome 1, No. 1. 1893. 8⁰.

Daschkow'sches ethnographisches Museum in Moskau:
Sistematitscheskoe Opisanie Kollekziy Daschkowskago ethnografitscheskago Musea. Bd. IV. 1895. 4⁰.

Direction des Musées public et Roumiantzow in Moskau:
Compte-rendu (in russ. Sprache). 1892—94. 1895. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. Année 1895, No. 1. 2. 1895. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:
Contributions. No. 4. Sacramento 1895. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Correspondenzblatt. 1895, No. 6—10. 4⁰.

K. bayer. technische Hochschule in München:
Programm für das Jahr 1895/96. 1895. 8⁰.
Bericht für das Jahr 1894/95. 1895. 4⁰.
Personalstand. Winter-Semester 1895—96. 1895. 8⁰.

Universität in München:
Schriften aus dem Jahr 1895 in 4⁰ u. 8⁰.

Historischer Verein in München:
Monatsschrift. 1895. No. 10. 11. 8⁰.
Oberbayerisches Archiv. Bd. 49, Heft 1. 1895. 8⁰.
56. und 57. Jahresbericht. 1895. 8⁰.

Aerztlicher Verein in München:
Sitzungsberichte. Bd. IV. 1894. 1895. 8⁰.

Akademischer Verlag München:
Hochschul-Nachrichten. 1895. No. 55—59. 4⁰.

Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:
22. Jahresbericht für 1893/94. 1894. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:
Mémoires. 5ᵉ Série. Tome 10. 11. 1893. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Sér. II. Tome 13, fasc. 28. 29. Paris 1894. 8⁰.
Catalogue de la bibliothèque. 1894. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:
Atti. Vol. 27. 1894—95. 1895. 8⁰.

R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconto. Ser. 3. Vol. I, fasc. 5–11. 1895. 8⁰.
Atti. Ser. II. Vol. 7. 1895. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:
Mittheilungen. Bd. XII, 1. Berlin 1895. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:
Kollektaneen-Blatt. 58. Jahrg. 1894. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):
Transactions. Vol. 44, part 4 und Appendix. 1895. 8⁰.
Report of the Proceedings of the flameless explosives Committee. Part I, 2. 1895. 8⁰.

Connecticut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:
Transactions. Vol. IX, 2. 1895. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. No. 295 u. 296. July and August 1895. No. 298—300. October—December 1895. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:
Report for the year 1894—95. 1895. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Annual Report for the year 1894. 1895. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:
Journal. Vol. 17, No. 8. 9. 11. Easton 1895. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. 27, No. 2. 3. 1895. 8⁰.

State Museum in New-York:
Bulletin. Vol. 3, No. 12. 13. Albany 1895. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:
Abhandlungen. Band X, Heft 3. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:
Jahresbericht 1893. 1894. 1894/95. 8⁰.
Mittheilungen. Heft 11. 1895. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Offenbach:
33.—36. Bericht 1891—95. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:
Mittheilungen. 20. Band. 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Osnabrück:
10. Jahresbericht. 1895. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:
Annual Report. New Series. Vol. VI. 1895. 8⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:
Proceedings and Transactions. Vol. XII. 1895. 4⁰.

Circolo matematico in Palermo:
Rendiconti. Tomo IX, fasc. 3–6. 1895. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1895. No. 26—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 121, No. 1-6. 8—26. 1895. 4⁰.

Bibliothèque nationale in Paris:

Catalogue des Manuscrits arabes. Fasc. 3. 1895. fol.

École polytechnique in Paris:

Journal. Cahier 63 et 64. 1893/94. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Travaux et Mémoires. Tome 8. 10. 1893/94. fol.
XVIᵉ Rapport sur l'exercice de 1892. 1893. fol.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 643—648. Juillet—Décembre 1895. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales in 4⁰. Tome XXV. XXVI, 1. 1894. 4⁰.
Annales. Bibliothèque d'études. Tome 4. 1894. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 27, 3; 28, 1—3; 29, 1—3; 30, 1—3; 31, 1. 1893/94. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1895, No. 4—6. 8⁰.
Nouvelles Archives. Sér. III. Tome V, VI, 1. 2. VII, 1. 1893—95. 4⁰.
Centenaire de la fondation du Muséum d'hist. nat. Volume commémoratif. 1893. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 1893. No. 5—12. 1894. No. 1—9. 1893/94. 8⁰.
Mémoires. III. Série. Tome I, fasc. 1—3. 1893/94. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1895, No. 9—13. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tome XVI, 2 et 3 trim. 1895. 8⁰.

Société de mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 23, No. 4—8. 1895. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome 18. 1893. 8⁰.
Mémoires. Tome VI, partie 1—4. 1893. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. V. Sér. Tome 2, No. 5. Tome 3, No. 1. 1895. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XII, 8. 9; XIII, 1—9; XIV, 1—5 et Suppl. au Tome XIII. 1893—95. 8⁰.
Mémoires. Vol. VIII, 2. 3; IX, 3. 4; X, 3; XIV, 1. 3. 1894/95. 4⁰.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Iswestija. Heft 4. 1895. 8⁰.
Éphémerides des étoiles (W. Döllen) pour 1896. 1895. 8⁰.

Kaiserl. russische geographische Gesellschaft in St. Petersburg:

Beobachtungen der russischen Polarstation an der Lenamündung. Th. I. 1882—84. 1895. 4⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XVII. 1895. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXVII, Heft 4—8. 1895. 8⁰.

Société des naturalistes de St. Pétersburg:

Travaux. a) Section de géologie. Vol. 23. b) Section de zoologie. Vol. 25. c) Section de botanique. Vol. 25. 1895. 8⁰.

Protokoly. 1895. No. 1—5. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Obosrenie. 1895/96. 1895. 8⁰.

Wostotschnyje Samjetki. (Orientalische Bemerkungen.) 1895. 4⁰

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. Vol. IX, part 4. 1895. fol.

Proceedings. 1895, part I. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XIX, No. 1—3. 1895. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 31, No. 9. June 1895. Vol. 32, No. 1. 2. October, November 1895. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 34, No. 147. 1895. 8⁰.

Transactions. New Series. Vol. XVIII, part 2. 1895. 4⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Scienze fisiche. Vol. VII. 1895. 8⁰.

Portland Society of natural History in Portland:

Proceedings. Vol. II, part 3. 1895. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Rozprawy. Třida I, Ročník 3, čislo 5; Třida II, Ročnik 3, číslo 22—32. Třida III, Ročník 3, číslo 1 und 4. 1894. 8⁰.

Historický Archiv. Číslo 6. 1895. 8⁰.

Věstník. Ročník IV. Číslo 1—3. 1895. 8⁰.

Bulletin international. Classe des sciences mathématiques I. 1894. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens auf dem Gebiete der Wissenschaft etc. im Jahre 1893. 1895. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band 24, No. 1—5. Bd. 25, No. 1. 1894/95. 8⁰.

K. K. Deutsche (Carl-Ferdinands) Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Winter-Semester 1895/96. 1895. 8⁰.

Personalstand 1895/96.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Jahrg. 1892-93. N. Folge. Heft 8. 1894. 8⁰.

Archaeological Institute of America in Princeton (New-Jersey):
American Journal of Archaeology. Jan.—Sept. 1895. 8⁰.

Kgl. botanische Gesellschaft in Regensburg:
Katalog der Bibliothek. Th. I. 1895. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:
Verhandlungen. Band 47. 1895. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:
Annuario 1895. 1894. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:
Bulletin. Vol. VI. 1895. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:
Atti. Ser. IV. Memoire della classe di scienze fisiche. Vol. VII. 1894. 4⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. IV. Semestre 1, fasc. 12. Semestre 2, fasc. 1—7. 1895. 4⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. I, part. 1. Memorie. 1894. Vol. III, part. 2. Notizie degli scavi. April—Aug. 1895. 1894/95. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. IV, fasc. 4—8. 1895. 8⁰.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 9 Giugno 1895. 1895. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:
Bollettino. Anno 1895, No. 2 u. 3. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:
Atti. Anno 47, Sessione V. Anno 48, Sessione I—VII. 1894/95. 4⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:
Mittheilungen. Vol. X, No. 1. 2. 1895. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:
Indici e cataloghi. 42 Hefte. 1886/95. 8⁰.

Zeitschrift L'Oriente in Rom:
L'Oriente. Rivista trimestrale. Anno II. No. 1. 2. 1895. 8⁰.

Kgl. italienische Regierung in Rom:
Opere di Galilei. Vol. V. Firenze 1895. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:
Archivio. Vol. XVIII, 1. 2. 1895. 8⁰.

Universität Rostock:
Schriften aus dem Jahr 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:
Précis analytique des travaux. Année 1891/92 et 1892/93. 1893/94. 8⁰.

Accademia degli Agiati in Rovereto:
Atti. Anno 145, Serie III. Vol. I, fasc. 2. 1895. 8⁰.

The American Association for the avancement of science in Salem:
Proceedings for the 43[d] Meeting. August 1894. 1895. 8⁰.

American Journal of Science in Salem:
Journal. No. 297. (Sept. 1895.) 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Urkundenbuch der Abtei Sanct Gallen. Th. IV, Lief. 4. 1895. 4⁰.
Der Klosterbruch in Rorschach und der St. Galler Krieg 1489/90 von Joh. Häne. 1895. 8⁰.

Observatorio astronómico meteorológico in San Salvator:

Anales. 1895. fol.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. Vol. IV, part 2. 1895. 8⁰.
Memoirs. Vol. II, No. 4. 1895. 4⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 35. Vereinsjahr. 1895. 8⁰.

K. K. Staatsgymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1894/95. 1895. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina in San Fernando:

Almanaque naútico para 1897. Madrid 1895. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino. Anno 18, No. 6—11. 1895. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mittheilungen. XIX. 1895. 8⁰.

K. schwedische Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Öfversigt. Vol. 51. 1894. 1895. 8⁰.
Astronomiska Jakttagelser. Vol. V, Heft 1—4. 1893—95. 4⁰.
Hj. Théel, Om Sveriges zoologiska hafsstation Kristineberg. 1895. 8⁰.
Handlingar. Bd. 26. 1894/95. 4⁰.

K. Vitterhets, Historie och Antiquitets-Akademie in Stockholm:

Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Del V, No. 4; Del XIV, No. 2; Del XVI, 1—3. 1895. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 17, Heft 1—6. 1895. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Heft 6 u. Heft 1895. 8⁰.

Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

K. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Beschreibung des Oberamts Cannstadt. 1895. 8⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. IV, 4. 1895. 4⁰.
Memoirs. Palaeontology. No. 9. 1895. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. 28. 1894. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of N.-South-Wales in Sydney:

Annual Report for the year 1894. 1895. fol.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletin. Tomo I, No. 22. Mexico 1895. 4⁰.
Anuario. Año de 1896. Mexico 1895. 8⁰.

Norske Videnskabs Selskab in Throndhjem (Drontheim):

Skrifter 1893. 1894. 8⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahr 1893. 1895. fol.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens in den Jahren 1888/89. 1895. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mittheilungen. Heft 56 u. Suppl.-Heft 2 zu Bd. VI. 1895. 4⁰.

Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. 7, part 5. 1895. 4⁰.
The Imperial University Calendar. 1894/95. 8⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XII, fasc. 1, 1895. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 30, disp. 12—16. 1895. 8⁰.

R. Museo geologico in Turin:

Essai sur l'orogénie de la terre par Fed. Sacco. 1895. 8⁰.

Universität Tübingen:

Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. XV, 2. 1895. 4⁰.

Universität in Upsala:

Schriften der Universität aus d. J. 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Deel XVI. 's Gravenhage 1895. 8⁰.
Verslag van de algemeene vergadering der leden, 16. April 1895. 's Gravenhage 1895. 8⁰.
Werken. III. Serie. No. 6. s'Gravenhage 1894. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks. III, 2. 1895. 8⁰.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Serie XVIII. Vol. 1. 2. 1894. 8⁰.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tomo 52, disp. 4—9. Tomo 53, disp. 1—3. 1893—95. 8⁰.
Memorie. Vol. 25, No. 1—3. 1894. 4⁰.

Bureau of Ethnology in Washington:

Chinook Texts by Franz Boas. 1894. 8⁰.
Archeologic Investigations in James and Potomac Valleys, by Gerard Fonke. 1894. 8⁰.
Tke Siouan Tribes of the East by James Mooney. 1894. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Bulletin. No. 6. Division of Ornithology. 1895. 8⁰.

Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:

Index-Catalogue. Vol. XVI. 1895. 4⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin. No. 34. 1895. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletin. No. 118—122. 1894. 8⁰.
Monographs. No. XXIII. XXIV. 1894. 4⁰.
14th annual Report 1892/93. Part I. II. 1893/94. 4⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Bd. 61. 1894. 4⁰.
Sitzungsberichte. Philos.-histor. Classe. Band 131 und Register zu Band 121—130. 1894. 8⁰.
Sitzungsberichte. Mathem.-physikal. Classe. Band 103, Abth. 1, No. 9—10, Abth. 2a, No. 6—10, Abth. IIb, No. 4—10, Abth. III, No. 5—10. 1894. 8⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Band 81, Hälfte II. 1895. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. Abth. II. Bd. 47, Hälfte 2. 1894. 8⁰.
Monumenta conciliorum generalium. Tom. III, pars 3. 1895. fol.
Almanach. 44. Jahrg. 1894. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1895. Band 45, Heft 1. 1895. 4⁰.
Verhandlungen. 1895. No. 8—13. 4⁰.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1892. Band 37. 1894. 4⁰.

Oesterreichische Gradmessungs-Commission in Wien:

Astronomische Arbeiten. 1895. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1895. No. 27—42. 44—52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXV, 2. 3. 1895. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 45. Band, Heft 6—9. 1895. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band X, 2. 1895. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 35. Band. Vereinsjahr 1894/95. 1895. 8⁰.

Verein für Nassau'sche Alterthumskunde in Wiesbaden:

Annalen. 27. Band. 1895. gr. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 48. 1895. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. 29, No. 2—5. 1895. 8⁰.

Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven:

Beobachtungen der meteorolog. Station. Th. I. Berlin 1895. 4⁰.

Oriental University Institute in Woking:

Vidmodya, the Sanscrit critical Journal. Vol. 24, No. 4—8. 1895. 8⁰.

Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:

Otto v. Heinemann, Die Handschriften der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Band V. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 40. Jahrg. Heft 2. 1895. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

7. Jahresbericht. 1893 u. 1894. 1895. 8⁰.

Zeitschrift: Astronomische Mittheilungen in Zürich:

Astronom. Mittheilungen. Jahrg. XII, No. 85 u. 86. 1895. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Le Prince Albert Ier de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. VIII et IX. 1895. fol.

Eduard Bodemann in Hannover:

Die Leibniz-Handschriften der k. öffentl. Bibliothek in Hannover. 1895. 8⁰.

Renward Brandstetter in Luzern:

Malaio-Polynesische Forschungen. No. IV. 1895. 4⁰.

Ludwig Friedländer in Strassburg:

Juvenalis saturarum libri V. 2 Voll. Leipzig 1895. 8⁰.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Ueber den Zusammenhang zwischen der erdmagnetischen Horizontal-Intensität und der Inclination. 1895. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Systematische Phylogenie der Wirbelthiere. Bd. III. Berlin 1895. 8⁰.

C. A. Hering in Dresden:

Das Entwicklungsgesetz der Erde und der Erzlagerstätten. 1895. 8⁰.

Gustavus Detlef Hinrichs in Saint-Louis:

The Elements of Atom-Mechanics. Vol. 1. 1894. 8⁰.

Charles Janet in Paris:

6 zoologische Abhandlungen in Separatabdrücken a. d. Jahre 1895. 8⁰.

James E. Keeler in Chicago. (London?):

1. Conditions affecting the Form of Lines in the Spectrum of Saturn.
2. A Spectroscopic Proof of the Meteoric Constitution of Saturn's Rings. 1895. 8⁰.

Albert von Kölliker in Würzburg:

Zum feineren Bau des Zwischenhirns. (Sep.-Abdr.) 1895. 8°.

Otto Kunze in Friedenau-Berlin:

Geognostische Beiträge. Leipzig 1895. 8°.

Le comte de Landberg in Tutzing:

Arabica. No. III. Leide 1895. 8°.

Émile Lemoine in Paris:

2 mathematische Abhandlungen. (Sep.-Abdr.) 1894/95. 8°.

Ernst Leyst in Moskau:

6 Abhandlungen aus dem Gebiete der Meteorologie und des Erdmagnetismus aus den Bänden X—XVIII des Repertorium für Meteorologie. St. Petersburg. 4°.

Katalog der meteorologischen Beobachtungen in Russland und Finnland. St. Petersburg 1887. 4°.

Observations faites à l'Observatoire météorologique de l'Université Impériale de Moscou. 1893. 1894/95. (Janvier—Mars). 4°.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 58, No. II. Tome 59, No. I. II. Paris 1895. 8°.

Julius v. Olivier in München:

Was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse? 1895. 8°.

Joseph Reber in Aschaffenburg:

Comenius' Werke. Band I. Giessen 1896. 8°.

Carl Meiser in Regensburg:

Taciti opera. Vol. 2, fasc. 7 ed Car. Meiser. Berolini 1895. 8°.

Otto Ribbeck in Leipzig:

Vergili opera rec. Otto Ribbeck. Vol. II—IV. 1895. 8°.

Wilhelm Schlemüller in Reichenberg:

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Prag 1895. 8°.

Hugo Schuchardt in Graz:

Sind unsere Personennamen übersetzbar? 1895. 8°.

Edmund Freiherr v. Uslar-Gleichen in Hannover:

Udo, Graf von Reinhausen, Bischof von Hildesheim. 1079—1114. 1895 8°.

Albrecht Weber in Berlin:

Vedische Beiträge. 1895. 4°.

Friedrich von Weech in Karlsruhe:

Codex diplomaticus Salemitanus. Tom. III. 1895. 8°.

Max Wellner in Neugedein:

Einleitung zur Geschichte der Wissenschaften. 1895. 8°.

Daniel Werenka in Czernowitz:

Topographie der Bukowina. 1895. 8°.

Ludwig F. A. Wimmer in Kopenhagen:

De Danske Runeminders-Maerker. fol.

Les Monuments runiques de l'Allemagne. 1895. 8°.

Namen-Register.

Sach-Register.